Quantencomputing - Übungsblatt 1

zu „Informatik im Berechnungsmodell“

Teil „2.2.1 Q-Register“

Technische Hochschule Mittelhessen, Fachbereich MNI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

a.) Gegeben seien zwei QBits, $|q_1\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ und $|q_2\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$. Das aus ihnen bestehende Quantenregister $|q_1 q_2\rangle$ ist dann definitionsgemäß im Zustand

$$\gamma_0|00\rangle + \gamma_1|01\rangle + \gamma_2|10\rangle + \gamma_3|11\rangle,$$

mit $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0, \gamma_1 = \alpha_0\beta_1, \gamma_2 = \alpha_1\beta_0, \gamma_3 = \alpha_1\beta_1$.
Bitte zeigen Sie, dass das ein zulässiger Zustand ist, d.h., das gilt: $\sum_{k=0}^{3} |\gamma_k|^2 = 1$.

b.) (Vorarbeit für c.))
Seien $N, M \in \mathbb{N}$ und $r_0, ..., r_{N-1}, s_0, ..., s_{M-1} \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) mit $\sum_{i=0}^{N-1} r_i^2 = \sum_{j=0}^{M-1} s_j^2 = 1$.
Bitte zeigen Sie:

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq N-1 \\ 0 \leq j \leq M-1}} (r_i s_j)^2 = 1.$$

c.) Gegeben seien zwei Quantenregister. Eines hat n QBits und ist im Zustand $\sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i|i\rangle$, das andere hat m QBits und ist im Zustand $\sum_{j=0}^{2^m-1} \beta_j|j\rangle$.
Das zusammengesetzte Quantenregister ist dann definitionsgemäß im Zustand

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq 2^n-1 \\ 0 \leq j \leq 2^m-1}} \alpha_i\beta_j|i\rangle|j\rangle.$$

Bitte zeigen Sie, dass das ein zulässiger Zustand eines Quantenregisters ist, dass also gilt: $\sum_{i,j} |\alpha_i\beta_j|^2 = 1$.

... auf der Rückseite kommen noch Aufgaben ...

Aufgabe 2

Der Zustand eines Quantenregisters aus drei QBits sei

$$|q_1q_2q_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{2}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|101\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}|111\rangle.$$

a.) Bitte geben Sie das Ergebnis der Messung an, wenn zunächst das erste, dann das dritte QBit gemessen wird.

b.) Bitte geben Sie das Ergebnis der Messung an, wenn zunächst das dritte, dann das erste QBit gemessen wird.

c.) Überzeugen Sie sich, dass beides gleich ist :-).

Aufgabe 3

Bitte überlegen Sie sich unverschränkte und verschränkte Zustände von Quantenregistern und messen Sie eins oder mehrere Bits, in unterschiedlichen Reihenfolgen, bis es Ihnen langweilig wird.
Ziel ist es, dass Sie direkt hinschreiben können, was das Ergebnis ist, wenn man z.B. das zweite und dritte Bit des folgenden Quantenregisters misst:

$$|q_1q_2q_3q_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0000\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0010\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|0011\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1110\rangle.$$

Aufgabe 4

Gegeben sei ein Quantenregister mit n QBits. Es befinde sich im Zustand

$$\sum_{x=(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} \alpha_x|x_1\ldots x_n\rangle.$$

Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j$.

a.) Bitte geben Sie das Ergebnis der Messung an, wenn zunächst das $i-$te, dann das $j-$te QBit gemessen wird.

b.) Bitte geben Sie das Ergebnis der Messung an, wenn zunächst das $j-$te, dann das $i-$te QBit gemessen wird.

c.) Überzeugen Sie sich, dass beides gleich ist :-).

Anmerkung: Diese Aufgabe ist anspruchsvoll. Sie zu lösen, erfordert technisches Geschick im Umgang mit Indexmengen und Summationen.

Programmieraufgaben

1. Programm: VOR oder NACH Aufgabe 1
(Unverschränkter) Registerzustand aus den Einzelzuständen von n QBits

Input:

Eine $n \times 2$-Matrix, bei denen jede Zeile den Zustand eines Q-Bits enthält, (beschrieben durch die beiden Amplituden):

$$\begin{bmatrix} \beta_0^{(1)} & \beta_1^{(1)} \\ \beta_0^{(2)} & \beta_1^{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_0^{(n)} & \beta_1^{(n)} \end{bmatrix}$$

Output:

Eine $2^n \times 1$-Matrix, mit den Koeffizienten des (unverschränkten) Registerzustands:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{2^n-1} \end{bmatrix}$$

Verfahren:

Rekursives Verfahren möglich. (Es geht auch mit dem Tensorprodukt, aber das kommt in der Vorlesung erst später dran).

2. Programm: NACH Aufgabe 3
Messen eines QBits aus einem Registerzustand

Input:

Ein Registerzustand (Matrix bzw. Array mit 2^n Elementen), die Anzahl n der Qbits im Register, und ein j mit $1 \leq j \leq n$, das angibt, welches QBit gemessen werden soll.

Output:

Für die möglichen Messergebnisse $|0\rangle$ und $|1\rangle$

i.) Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Ergebnisse angenommen werden, und

ii.) Der Zustand, in dem sich das Register dann jeweils befindet.

Verfahren:

Wie in der Vorlesung besprochen. Die Kunst beim Programmieren besteht darin, den Werten $|0\rangle$ und $|1\rangle$ die richtigen Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen, d.h., die Koeffizienten des Zustandsvektors korrekt in die beiden Töpfe $|0\rangle$ und $|1\rangle$ aufzuspalten.
Wer möchte, kann zusätzlich prüfen lassen, ob der Input überhaupt ein zulässiger Registerzustand für n Qbits ist.
Die Beispiele aus Aufgabe 2 und 3 sind mögliche Testfälle für das Programm.

Viel Spass und Erfolg!