Übungen Logik und formale Methoden

[Viele der Übungen sind aus dem Buch von Huth und Ryan.]

A Aussagenlogik

Aussagen

1. Aussagen

Welche der folgenden Sätze sind wahrheitsdefinite Aussagen?

(a) Ich gratuliere Dir zum Geburtstag.

(b) Es zieht.

(c) Schließen Sie bitte das Fenster.

(d) Gießen ist nördlich von Frankfurt.

(e) Gießen ist südlich von Frankfurt.

(f) Geht es Hans gut?

(g) Gisela studiert Informatik.

2. Formalisierung von Aussagen

Formalisieren Sie folgende Aussagen mit Hilfe der Junktoren $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$ und $\vee$. Geben Sie jeweils an, welche atomaren Aussagen p, q, ... Sie verwenden.

(a) Wenn die Sonne heute scheint, wird sie morgen nicht scheinen.

(b) Wenn das Barometer fällt, wird es regnen oder schneien.

(c) Wenn eine Anfrage eingeht, wird sie irgendwann bestätigt oder die Anfragebearbeitung macht überhaupt keinen Fortschritt mehr.

(d) Wenn die Zinsen steigen, sinken die Aktienkurse.

(e) Heute wird es regnen oder die Sonne wird scheinen, aber nicht beides.

(f) Krebs wird nicht heilbar sein, ehe nicht die Ursache gefunden wird und ein neues Medikament entwickelt wird.

(g) Wenn der Mond ein gelber Käse ist, ist 6 eine Primzahl.

Die formale Sprache der Aussagenlogik

3. Klammern in Ausdrücken

Wir erinnern uns an die Regeln über die logischen Operatoren:

$\neg$ bindet stärker als $\wedge$
$\wedge$ bindet stärker als $\vee$
$\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$
$\rightarrow$ ist rechts-assoziativ, d.h. $p \rightarrow q \rightarrow r$ ist kürzer für $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

Fügen Sie in die folgenden Ausdrücken die Klammern entsprechend der angegebenen Regeln ein.

(a) $\neg p \wedge q \rightarrow r$

(b) $(p \to q) \wedge \neg(r \vee p \to q)$

(c) $(p \to q) \to (r \to s \vee t)$

(d) $p \vee (\neg q \to p \wedge r)$

(e) $p \vee q \to \neg p \wedge r$

(f) $p \vee q \to \neg q$

(g) Weshalb ist der Ausdruck $p \vee q \wedge r$ (trotz unserer Regeln) problematisch?

4. Syntaxbaum finden

Zeichnen Sie zu folgenden Formeln den abstrakten Syntaxbaum

(a) p

(b) $p \wedge q$

(c) $p \wedge \neg q \to \neg p$

(d) $p \wedge (\neg q \to \neg p)$

(e) $p \to (\neg q \wedge (q \to p))$

(f) $\neg((\neg q \wedge (p \to r)) \wedge (r \to q))$

(g) $\neg p \vee (p \to q)$

(h) $(p \wedge q) \to (\neg r \vee (q \to r))$

(i) $((s \vee (\neg p)) \to (\neg p))$

(j) $(s \vee ((\neg p)) \to (\neg p))$

(k) $(((s \to (r \vee l)) \vee ((\neg q) \wedge r)) \to ((\neg(p \to s)) \to r))$

(l) $(p \to q) \wedge (\neg r \to (q \vee (\neg p \wedge r)))$

5. Subformeln finden

Geben Sie zu folgenden Formeln alle Subformeln an:

(a) $p \to (\neg p \vee (\neg\neg q \to (p \wedge q)))$

(b) $(s \to r \vee l) \vee (\neg q \wedge r) \to (\neg(p \to s) \to r)$

(c) $(p \to q) \wedge (\neg r \to (q \vee (\neg p \vee r)))$

6. Syntaxbaum zeichnen

Zeichnen Sie den Syntaxbaum zu einer Formel ϕ folgender Form:

(a) ϕ ist die Negation einer Implikation

(b) ϕ ist eine Konjunktion von Disjunktionen

(c) ϕ ist eine Konjunktion von Konjunktionen

7. Überprüfung der Syntax von Formeln

Geben Sie zu folgenden Formeln an, ob sie wohlgeformt sind nach den Syntaxregeln und den Regeln zu den Klammern (siehe oben). Begründung!

(a) $p \wedge \neg(p \vee \neg q) \to (r \to s)$

(b) $p \wedge \neg(p \vee q \wedge s) \to (r \to s)$

(c) $p \wedge \neg(p \wedge \vee s) \to (r \to s)$

Semantik der Aussagenlogik

8. Wahrheitstafeln

Konstruieren Sie Wahrheitstafeln für folgende Formeln

(a) $p \to q$ und $\neg p \lor q$

(b) $((p \to q) \to p) \to p$

(c) $p \lor (\neg(q \land (r \to q)))$

(d) $(p \land q) \to (p \lor q)$

(e) $((p \to \neg q) \to \neg p) \to q$

(f) $(p \to q) \lor (p \to \neg q)$

(g) $((p \lor q) \to r) \to ((p \to r) \lor (q \to r))$

(h) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$

9. Gültigkeit etc.

Geben Sie zu folgenden Formeln an, ob sie (a) allgemeingültig, (b) erfüllbar, (c) falsifizierbar, (d) unerfüllbar sind.

(a) q

(b) $q \lor p$

(c) $p \lor \neg p$

(d) $p \to \neg p$

(e) $\neg p \to p$

(f) $p \to (q \to p)$

(g) $p \to (p \to q)$

(h) $((p \to q) \land p) \to q$

10. Äquivalenz von Formeln

Prüfen Sie mittels Wahrheitstafeln, ob folgende Äquivalenzen gelten:

(a) $(p \to q) \to r \equiv p \to (q \to r)$

(b) $(p \to q) \to r \equiv (p \land q) \to r$

(c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

(d) $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$

11. Formel zur Wahrheitstafel

Gegeben sei die folgende Wahrheitstafel

p_1	p_2	p_3	ϕ
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	F

(a) Finden Sie eine Formel ϕ, die diese Wahrheitstafel hat.

(b) Welchem Sprachkonstrukt von Programmiersprachen entspricht diese Wahrheitstafel?

12. Zusammenhang von Gültigkeit und Erfüllbarkeit

Beweisen oder widerlegen Sie folgenden Aussagen über Formeln ϕ und ψ:

(a) Wenn ϕ allgemeingültig ist, dann ist ϕ erfüllbar.

(b) Wenn ϕ erfüllbar ist, dann ist $\neg\phi$ unerfüllbar.

(c) Wenn ϕ allgemeingültig ist, dann ist $\neg\phi$ unerfüllbar.

(d) Wenn ϕ unerfüllbar ist, dann ist $\neg\phi$ allgemeingültig.

(e) Wenn ϕ und $(\phi \to \psi)$ allgemeingültig sind, dann ist auch ψ allgemeingültig.

(f) Wenn ϕ und $(\phi \to \psi)$ erfüllbar sind, dann ist auch ψ erfüllbar.

(g) Wenn $\phi \equiv \psi$ gilt, dann ist $\phi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig.

13. Semantische Äquivalenz – Beispiel

Welche der folgenden Formeln ist zu $p \to (q \vee r)$ semantisch äquivalent?

(a) $q \vee (\neg p \vee r)$

(b) $q \wedge \neg r \to p$

(c) $p \wedge \neg r \to q$

(d) $\neg q \wedge \neg r \to \neg p$

14. Semantische Äquivalenz – Eigenschaften

Zeigen Sie, dass die Relation $\equiv$ folgende Eigenschaften hat:

(a) $\equiv$ ist reflexiv, d.h. es gilt
für alle Formeln ϕ: $\phi \equiv \phi$.

(b) $\equiv$ ist symmetrisch, d.h. es gilt
für alle Formeln ϕ, ψ: Wenn $\phi \equiv \psi$ gilt, dann auch $\psi \equiv \phi$.

(c) $\equiv$ ist transitiv, d.h. es gilt
für alle Formeln ϕ, ψ, χ: Aus $\phi \equiv \psi$ und $\psi \equiv \chi$ folgt $\phi \equiv \chi$.

Eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, heißt auch *Äquivalenzrelation*.

15. Semantische Äquivalenz – Eigenschaften von Operatoren

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Booleschen Operatoren

(a) $\wedge$ und $\vee$ sind kommutativ, d.h.
$\phi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \phi$ und
$\phi \vee \psi \equiv \psi \vee \phi$.

(b) $\wedge$ und $\vee$ sind assoziativ, d.h.
$\phi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\psi \wedge \phi) \wedge \chi$ und
$\phi \vee (\psi \vee \chi) \equiv (\psi \vee \phi) \vee \chi$.

(c) $\wedge$ und $\vee$ sind absorptiv (erfüllen die Verschmelzungsregeln), d.h.
$\phi \wedge (\phi \vee \psi) \equiv \phi$ und
$\phi \vee (\phi \wedge \psi) \equiv \phi$.

(d) $\wedge$ und $\vee$ sind distributiv, d.h.
$\phi \wedge (\psi \vee \chi) \equiv (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)$ und
$\phi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)$.

(e) Die Negation $\neg$ erfüllt die Komplementregeln d.h.
$\phi \wedge \neg\phi \equiv \bot$ und
$\phi \vee \neg\phi \equiv \top$.

Eine Menge mit den Operatoren $\wedge, \vee, \neg$ und den Konstanten $\top, \bot$ mit diesen Eigenschaften nennt man *Boolesche Algebra*.

Natürliches Schliessen

Programm zur Lösung der Aufgaben zum natürlichen Schließen
Richard Bornat und Bernard Sufrin haben den *Jape proof calculator*[1] entwickelt, mit dem man Herleitungen mit den Regeln des natürlichen Schließens interaktiv entwickeln kann. Ich hatte beim „Spielen“ mit diesem Programm den Eindruck, dass man schnell rausfindet, wie man bei den Herleitungen mit dem Programm vorzugehen hat. Ich empfehle deshalb für die Übungen Jape zu verwenden.
Die Dateien zur Installation von Jape findet man auf der Webseite `jape.org.uk`. Für unsere Übungen habe ich die Dateien, die man zum natürlichen Schließen braucht etwas angepasst und bereits die Aufgaben eingegeben. Um dies zu verwenden, laden Sie die Datei `lfm-jape.zip` von meiner Webseite herunter, entpacken Sie in ein Verzeichnis. Nach dem Start von Jape wählen Sie den Menüpunkt File/Open new theory... und wählen die Datei `I2L-LfM.jt` aus dem Verzeichnis, in das Sie `lfm-jape.zip` entpackt haben.

16. Zusätzliche Regeln für Herleitungen

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $p \vdash \neg\neg p$ ($\neg\neg$i)

(b) $\neg\neg p \vdash p$ ($\neg\neg$e)

(c) $p \to q,\ \neg q \vdash \neg p$ (MT Modus tollens)

(d) $\vdash p \vee \neg p$ (TND Tertium non datur)

(e) $p \to q \vdash \neg q \to \neg p$ (Kontraposition)

(f) $p \to q, \neg p \to q \vdash q$ (Beweis durch Fallunterscheidung)

17. Klassische Gesetze

Zeigen Sie folgende Aussagen (Peirce's Gesetz und die De Morgan-Gesetze[2]):

(a) $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$

(b) $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

(c) $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

(d) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

(e) $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

[1] „Jape is a synonym of joke.“ [`en.wikipedia.org`]
[2] Charles Sanders Peirce, amerikanischer Logiker 1839 - 1914, Augustus De Morgan, englischer Mathematiker 1806 - 1871

18. Herleitungen

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

(b) $p \wedge q \vdash q \wedge p$

(c) $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$

(d) $p \to (p \to q), p \vdash q$

(e) $q \to (p \to r), \neg r, q \vdash \neg p$

(f) $\vdash (p \wedge q) \to p$

(g) $p \vdash (p \to q) \to q$

(h) $(p \to r) \wedge (q \to r) \vdash p \wedge q \to r$

(i) $q \to r \vdash (p \to q) \to (p \to r)$

(j) $p \to q, r \to s \vdash p \vee r \to q \vee s$

(k) $(p \vee (q \to p)) \wedge q \vdash p$

(l) $p \to q, r \to s \vdash p \wedge r \to q \wedge s$

(m) $p \to q \wedge r \vdash (p \to q) \wedge (p \to r)$

(n) $p \vee (p \wedge q) \vdash p$

(o) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

19. Herleitung aus der Wahrheitstafel

Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Formel ϕ gegeben durch $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ auf.

Verwenden Sie die Wahrheitstafel, um eine Herleitung $\vdash \phi$ zu generieren, so wie wir das im Beweis der Vollständigkeit des natürlichen Schließens getan haben.

NORMALFORMEN

20. Konjunktive Normalform CNF

Bestimmen Sie für folgende Formeln die konjunktive Normalform CNF:

(a) $\neg(p \leftrightarrow q)$

(b) $((p \to q) \to q) \to q$

(c) $(p \to (p \wedge \neg q)) \wedge (q \to (q \wedge \neg p))$

21. Disjunktive Normalform DNF

Bestimmen Sie für folgende Formeln die disjunktive Normalform DNF:

(a) $\neg(p \leftrightarrow q)$

(b) $((p \to q) \to q) \to q$

(c) $(p \to (p \wedge \neg q)) \wedge (q \to (q \wedge \neg p))$

22. Algorithmus CNF etc.

Berechnen Sie schrittweise nachvollziehbar
$\texttt{cnf}(\texttt{nnf}(\texttt{impl\_free}(\neg(p \to (\neg(q \wedge (\neg p \to q)))))))$.

Entscheidungsfragen der Aussagenlogik

23. Horn-Formeln

Wenden Sie den Algorithmus für Horn-Formeln an:

(a) $(p \wedge q \wedge w \to \bot) \wedge (t \to \bot) \wedge (r \to p) \wedge (\top \to r) \wedge (\top \to q) \wedge (u \to s) \wedge (\top \to u)$

(b) $(p \wedge q \wedge s \to p) \wedge (q \wedge r \to p) \wedge (p \wedge s \to s)$

(c) $(p \wedge q \wedge s \to \bot) \wedge (q \wedge r \to p) \wedge (\top \to s)$

(d) $(\top \to q) \wedge (\top \to s) \wedge (w \to \bot) \wedge (p \wedge q \wedge s \to \bot) \wedge (v \to s) \wedge (\top \to r) \wedge (r \to p)$

24. Horn-Klauseln

Eine Formel in konjunktiver Normalform heißt Horn-Klausel, wenn jede Disjunktionsgruppe in der Formel höchstens ein positives Literal hat.

Stellen Sie die Formeln der vorherigen Aufgabe in dieser Form dar und zeigen Sie, dass die Formeln jeweils tatsächlich semantisch äquivalent sind.

25. Alles Horn-Formeln?

Beweisen sie, dass es nicht zu jeder Formel eine semantisch äquivalente Horn-Formel gibt.

SAT-Solver

26. Ratschlag

„Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?“ wurde ein 100-jähriger gefragt. „Ich halte mich streng an die Diätregeln: wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit trinke, dann verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an.“

Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend. Können Sie ihn vereinfachen? [Schöning, p.12]

(a) Formalisieren Sie die Aussagen des Greises.

(b) Verwenden Sie den MPA und ermitteln Sie Wahrheitswerte für die Atome, unter denen die Aussagen wahr sind.

(c) Ermitteln Sie eine Vereinfachung des Rats als Formel und drücken Sie die einfachere Formel in natürlicher Sprache aus.

27. Zeit-Rätsel

Die Wochenzeitung „Die Zeit“ veröffentlicht Rätsel der folgenden Art:

Von den Unsen ist bekannt, dass sie entweder immer lügen oder immer die Wahrheit sagen.
Ansen, der Magier: „Wenn Honsen, der Medizinmann, lügt, dann sagt genau einer von Donsen, dem Wächter, und Insen, dem Späher, die Wahrheit.“
Bonsen, der Häuptling: „Wenn Consen, der Krieger, und Ensen, der Stallbursche, lügen, dann sagt Konsen, der älteste, die Wahrheit.“
Consen, der Krieger: „Wenn Konsen, der Älteste, lügt, dann lügt auch Donsen, der Wächter.“
Donsen, der Wächter: „Wenn Insen, der Späher, die Wahrheit sagt, dann lügt entweder

Gonsen oder Ensen."
Ensen, der Stallbursche: „Wenn Ansen, der Magier, lügt, dann sagt Insen die Wahrheit."
Fonsen, der Jäger: „Wenn Insen, der Späher, und Ansen, der Magier, beide die Wahrheit sagen, dann lügt Gonsen, der Gärtner."
Gonsen, der Gärtner: „wenn Insen lügt, dann lügt auch Fonsen."
Honsen, der Medizinmann: „Wenn Ensen die Wahrheit sagt, dann sagt auch Donsen, der Wächter, die Wahrheit."
Insen, der Späher: „Wenn Honsen, der Medizinmann, lügt, dann sagt Bonsen, der Häuptling, die Wahrheit."
Konsen, der Älteste: „Wenn Ensen, der Stallbursche, lügt, dann sagt von Insen, dem Späher, und Ansen, dem Magier, genau einer die Wahrheit."

So was kann ein Informatiker doch maschinell lösen, oder?

28. Noch ein Zeit-Rätsel

Logelei aus dem Zeit Magazin Nr.48/2007 22.November 2007

Eines Tages kommt die Katze des Dorflehrers mit einem rosa Hut auf dem Kopf nach Hause.
Der Lehrer empört: „Das waren bestimmt wieder einige der acht Lausbuben in meiner Klasse!"
Im Dorf läuft ihm Simon über den Weg, von dem er erfahrt:
„Wenn Detlev an der Aktion beteiligt war, dann auch Rolf!"
Als er gerade den Laden betreten will, sieht er Michel.
Der beteuert: „Wenn Friedl mitgemacht hat, dann hat aber Detlev nichts mit der Sache zu tun."
Im Laden trifft er Detlev, welcher bekundet: „Das hat Simon angezettelt."
Auf dem Heimweg begegnet er schließlich Tobias und erfahrt von diesem: „Klaus hat nichts mit der Sache zu tun!"
Am nächsten Morgen, bevor der Unterricht anfängt, begegnet der Lehrer im Schulhof Friedl, der sagt:
„Wenn Tobias unschuldig ist, dann war Michel daran beteiligt!"
In der großen Pause nimmt er sich der Reihe nach Klaus und Rolf vor.
Klaus: „Wenn Rolf dabei war, dann auch Simon!"
Rolf: „Torsten war's!"
Fehlt nur noch Torsten, der muss ohnehin heute nachsitzen. Eine gute gelegenheit, um auch ihn zu befragen.
Ergebnis: „Soweit ich weiß, war Klaus einer von denen, die der Katze den Hut aufgebunden haben."

Die Schuldigen haben natürlich gelogen, die anderen nicht. Wer war's?

29. Färbungen

Man möchte oft auf planaren Karten Länder so färben, dass benachbarte Länder nicht dieselbe Farbe haben. Interessant ist die frage, ob man damit mit drei Farben auskommt. Bekannt ist, dass vier Farben genügen – der sogenannte Vier-Farben-Satz.

Überlegen Sie, wie man diese Fragestellung in der Aussagenlogik formulieren kann. und zeigen Sie mit dem MPA, dass man die Karte der Staaten und Territorien Australiens mit drei Farben färben kann.

30. DPLL-Algorithmus

Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf folgende Formel in CNF an:

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s)$$

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit dem MPA.

B Prädikatenlogik

Objekte und Prädikate

31. WM 2006

Gegeben seien folgende Prädikate:

$b(x, y)$: x besiegt y
$f(x)$: x ist Fußball-Nationalmannnschaft
$t(x, y)$: x ist Torwart von y
$v(x, y)$: x verliert gegen y

und folgende Konstanten:

de: deutsche Nationalmannschaft
br: brasilianische Nationalmannschaft
to: Nationalmannschaft togos

Drücken Sie folgende Aussagen in der Prädikatenlogik aus:

(a) Jede Fußball-Nationalmannschaft hat einen Torwart.

(b) Wenn de gegen to gewinnt, dann verliert de nicht jedes Spiel.

(c) br schlägt jedes Team, gegen das de verliert, mit Ausnahme von sich selbst.

Zusatzaufgabe: Spezifizieren Sie die Situation mit vier Mannschaften in Alloy und erzeugen Sie mit dem Alloy-Analyzer mögliche Verläufe der WM.

32. Prädikate finden

Finden Sie geeignete Prädikate, um folgendes in der Prädikatenlogik auszudrücken:

(a) Alle roten Dinge sind in der Schachtel.

(b) Nur rote Dinge sind in der Schachtel.

(c) Kein Tier ist zugleich eine Katze und ein Hund.

(d) Jeder Preis wurde von (irgend)einem Spieler gewonnen.

(e) Ein Spieler hat jeden Preis gewonnen.

Die formale Sprache der Prädikatenlogik

33. Terme und Syntaxbaum

Die Menge F sei d, f, g mit einer Konstanten d, einem Funktionssymbol f mit 2 Argumenten und einem Funktionssymbol g mit 3 Argumenten.

Welche der folgenden Zeichenfolgen sind Terme über F. Zeichnen Sie den Syntaxbaum der Zeichenfolgen, die Terme sind.

(a) $g(d, d)$

(b) $f(x, g(y, z), d)$

(c) $g(x, f(y, z), d)$

(d) $g(x, h(y, z), d)$

(e) $f(f(g(d, x), f(g(d, x), y, g(y, d)), g(d, d)), g(f(d, d, x), d)z)$

34. Syntaktisch korrekte Formeln

m sei eine Konstante, f ein Funktionssymbol mit einem Argument und S und B zwei Prädikate mit jeweils zwei Argumenten. Welche der folgenden Zeichenfolgen ist eine (syntaktisch korrekte) Formel der Prädikatenlogik? Begründung, wenn nicht.

(a) $S(m, x)$
(b) $B(m, f(m))$
(c) $f(m)$
(d) $B(B(m, x), y)$
(e) $S(B(m), z)$
(f) $(B(x, y) \to (\exists z S(x, y)))$
(g) $(S(x, y) \to S(y, f(f(x))))$
(h) $(B(x) \to B(B(x)))$

35. Spielen mit Formeln

Gegeben sei die Formel ϕ

$$\exists x(P(y, z) \wedge (\forall y(\neg Q(y, x) \vee P(y, z))),$$

mit Prädikaten P und Q in zwei Argumenten.

(a) Zeichnen Sie den Syntaxbaum von ϕ.
(b) Identifizieren Sie alle freien und gebundenen Variablen in ϕ.
(c) Gibt es eine Variable in ϕ, die gebunden *und* frei vorkommt?
(d) Gegeben seien eine Variable w und die Funktionssymbole $f(x)$ und $g(y, z)$ mit einem bzw. zwei Argumenten.
Berechnen Sie $\phi[w/x]$, $\phi[w/y]$, $\phi[f(x)/y]$ und $\phi[g(y, z)/z]$.

Semantik der Prädikatenlogik

36. Modelle erfüllen die Formel?

Gegeben sei die Formel ϕ als $\forall x \exists y \exists z(P(x, y) \wedge P(z, y) \wedge P(x, z) \to P(z, x))$ Welches der folgenden Modell erfüllt ϕ?

(a) Das Modell mit dem Universum $\mathcal{A}$ gewählt als die natürlichen Zahlen und der Definition von P als $\{(m, n) | m < n\}$.
(b) Das Modell mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Universum und P als $\{(m, 2 * m) | m \in \mathbb{N}\}$.
(c) Das Modell mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als Universum und P als $\{(m, n) | m < n + 1\}$.

37. Modell finden

Gegeben sei die Formel ϕ als $\forall x \forall y Q(g(x, y), g(y, y), z)$, wobei Q ein Prädikat mit 3 Argumenten und g ein Funktionssymbol mit 2 Argumenten ist.

(a) Finden Sie ein Modell $\mathcal{M}$ und eine Variablenbelegung l, so dass gilt: $\mathcal{M} \models_l \phi$.
(b) Finden Sie ein Modell $\mathcal{M}$ und eine Variablenbelegung l, so dass gilt: $\mathcal{M} \not\models_l \phi$.

38. Modelle erfüllen die Formel?

Gegeben sei die Formel ϕ als $\forall x \forall y \exists z (R(x,y) \to R(y,z))$ mit einem Prädikat R in zwei Argumenten.

(a) Das Universum $\mathcal{A}$ sei die Menge $\{a, b, c, d\}$ und gegeben sei die Relation R als $\{(b,c),(b,b),(b,a)\}$. Gilt $\mathcal{M} \models \phi$? Begründung.

(b) Das Universum $\mathcal{A}$ sei die Menge $\{a, b, c, \}$ und gegeben sei die Relation R als $\{(b,c),(a,b),(c,b)\}$. Gilt $\mathcal{M} \models \phi$? Begründung.

39. Relationen und Logik

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{A}$ und eine binäre Relation R über $\mathcal{A}$.

Drücken Sie die folgenden Eigenschaften der Relation als Formel der Prädikatenlogik aus und konstruieren Sie jeweils ein kleines Modell mit einer (kleinen) endlichen Menge $\mathcal{A}$.

(a) R ist nicht leer.

(b) R ist transitiv.

(c) R ist reflexiv.

(d) R ist irreflexiv.

(e) R ist symmetrisch.

(f) R ist eine Funktion.

(g) R ist injektiv.

(h) R ist surjektiv.

(i) R ist total.

(j) R ist bijektiv.

40. Paradoxon?

Der Kreter Epimenides sagt: „Alle Kreter lügen“. Dieser Satz wird gerne als das Lügner-Paradoxon bezeichnet.

Überdenken Sie und diskutieren Sie den Sachverhalt.

Natürliches Schließen

41. Gesetze der Prädikatenlogik

Zeigen Sie folgende Gesetze der Prädikatenlogik mittels natürlichen Schließens:

(a) $\neg \forall x P(x) \vdash \exists x \neg P(x)$

(b) $\exists x \neg P(x) \vdash \neg \forall x P(x)$

(c) $\neg \exists x P(x) \vdash \forall x \neg P(x)$

(d) $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

(e) $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \vdash \forall x((P(x) \wedge Q(x))$

(f) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

(g) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vdash \exists x(P(x) \vee Q(x))$

(h) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

(i) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(x))$

(j) $\exists x(P(x) \land Q(x)) \vdash \exists x P(x) \land \exists x Q(x)$

42. Einfache Herleitungen

Beweisen Sie folgende Aussagen mittels natürlichen Schließens

(a) $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall u \forall v P(u, v)$

(b) $\exists x \exists y F(x, y) \vdash \exists u \exists v F(u, v)$

(c) $\exists x \forall y P(x, y) \vdash \forall y \exists x P(x, y)$

43. Herleitungen

Beweisen Sie folgende Aussagen mittels natürlichen Schließens

(a) $\exists x(S \to Q(x)) \vdash S \to \exists x Q(x)$

(b) $\neg \forall x \neg P(x) \vdash \exists x P(x)$

(c) $\exists x P(x) \vdash \neg \forall x \neg P(x)$

(d) $S \to \forall x Q(x) \vdash \forall x(S \to Q(x))$

44. Herleitung finden und beweisen

Formalisieren Sie folgende Aussagen und beweisen Sie mittels des natürlichen Schließens:

Alle Linguisten kennen Chomsky
Alle Computerlinguisten sind Linguisten
Also: Alle Computerlinguisten kennen Chomsky

Relationale Logik mit Alloy

45. Modelle für Assoziationen zwischen Klassen

Gegeben seien zwei Klassen `A` und `B` mit einer Assoziation zwischen den beiden Klassen (wie im Klassendiagramm der UML üblich). Es sollen folgende Multiplizitäten der Assoziation vorgegeben sein:

(a) `1 - 1`

(b) `0..1 - 1`

(c) `0..1 - 0..1`

(d) `1 - *`

(e) `0..1 - *`

(f) `0..1 - 1..*`

(g) `1 - 1..*`

(h) `* - *`

(i) `1..* - *`

(j) `1..* - 1..*`

Erstellen Sie Alloy-Spezifikationen und verwenden Sie den Alloy Analyzer, um Objektmodelle zu simulieren, die die Constraints erfüllen.

46. Assoziationsklassen simulieren

Im Metamodell der UML ist eine Assoziationsklasse sowohl eine Assoziation als auch eine Klasse. Erstelllen Sie Alloy-Spezifikationen für die Klassen `A` und `B` mit verbindender Assoziationsklasse `AC` mit folgenden Multiplizitätem

(a) `* - *`

(b) `1..* - 1..*`

47. Graphen

Erstellen Sie Alloy-Modelle für folgende Typen von Graphen und „überprüfen“ Sie das jeweilige Modell durch Simulation im Alloy analyzer.

(a) (Ungerichteter) *Graph*, bestehend aus Ecken und Kanten. Zwei Ecken sind durch höchstens eine Kante verbunden. Es gibt keine Schleifen, d.h. eine Ecke ist nie durch eine Kante mit sich selbst verbunden.

(b) *Gerichteter Graph* ohne Schleifen

(c) *Gerichteter Graph* mit Schleifen

(d) *Gerichteter Multigraph*, bei dem zwei Ecken durch mehrere Kanten verbunden sein können.

(e) Ungerichteter *Multigraph*

48. Entwurfsmuster Composite

Das Entwurfsmuster Composite der GoF hat folgende Bestimmung

> Compose objects into tree structures to represent part-whole hierarchies. Composite lets clients treat individual objects and compositions of objects uniformly.

Erstellen Sie eine Spezifikation des Musters in Alloy und drücken Sie *alle* benötigten Eigenschaften der Struktur des Musters in Alloys relationaler Logik aus.

Zusatzaufgabe: Betrachten Sie auch dynamische Aspekte: Veränderungen der Struktur durch Hinzufügen oder Wegnehmen von Elementen. Was lernt man daraus über das Muster? Was muss man bei einer Implementierung des Musters infolgedessen beachten?

49. Entwurfsmuster Decorator

Das Entwurfsmuster Decorator der GoF hat folgende Bestimmung

> Attach additional responsibilities to an object dynamically. Decorators provide a flexible alternative to subclassing for extending functionality.

Erstellen Sie eine Spezifikation des Musters in Alloy und drücken Sie *alle* benötigten Eigenschaften der Struktur des Musters in Alloys relationaler Logik aus.

Zusatzaufgabe: Betrachten Sie auch dynamische Aspekte: Veränderungen der Struktur durch Hinzufügen oder Wegnehmen von Elementen. Was lernt man daraus über das Muster? Was muss man bei einer Implementierung des Musters infolgedessen beachten?

50. E-Mail-Anwendung

Gegeben sei das Diagramm 1 für die Struktur der Empfänger in einer E-Mail-Anwendung.

Das Diagramm zeigt, dass jeder potentielle Empfänger einer E-Mail eine direkte Adresse hat oder einen Alias, der selbst wieder auf andere Adressen oder Aliase verweisen kann – verallgemeinert zu einer `id`.

Jede Nachricht hat nun eine Menge von Zielen (`target`), die bestimmte Empfänger explizit einschließen soll, andere explizit ausschließen soll.

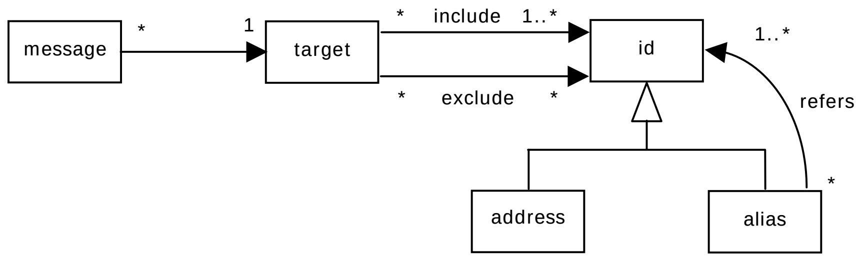

Abbildung 1: Struktur E-Mail-Empfänger

Ein solches Schema kann zum Beispiel praktisch sein, wenn man manchmal Nachrichten an bestimmte Gruppen von Personen wie Kollegen verschickt, dabei aber andere Personen, wie z.B. persönliche Bekannte ausschließen möchte – oder umgekehrt.

Die Frage nun: wie soll in der E-Mail-Anwendung mit den Attributen `include` und `exclude` verfahren werden? Sollen erst die Aliase dereferenziert werden und dann die Differenz zwischen den *include*-Adressen und den *exclude*-Adressen gebildet werden? Oder muss die Reihenfolge umgekehrt sein? Oder spielt sie gar keine Rolle?

[Beispiel stammt von Michael Jackson]

51. Kripke-Strukturen

Eine Kripke-Struktur ist ein endlicher Zustandsautomat (*state machine*) mit einer nichtleeren Menge `init` von Initalzuständen, einer Abbildung `prop` der Zustände in eine Menge von atomaren Aussagen, einer Relation von Zustandübergängen `next` und einer Menge von Endzuständen `final`. Die Abbildung `prop` gibt an, welche der atomaren Aussagen in dem jeweiligen Zustand gegeben (wahr) ist.

Was ist zu tun?

(a) Erstellen Sie eine Alloy-Spezifikation für Kripke-Strukturen.

(b) Schreiben Sie eine `fun`-Anweisung `Reaches`, die zu einer Kripke-Struktur alle Zustände ermittelt, die von einem Initalzustand aus erreichbar sind.

(c) Schreiben Sie ein Prädikat, mit dem man überprüfen kann, ob eine Kripke-Struktur keinen Deadlock hat (d.h. nur finale Zustände können keinen Folgezustand haben).

(d) Schreiben Sie ein Prädikat, mit dem man überprüfen kann, ob eine Kripke-Struktur deterministisch ist (d.h. ein Zustand hat höchstens eine weiterführende Transition).

(e) Schreiben Sie ein Prädikat, mit dem man überprüfen kann, ob ein Zustand mit einer bestimmten Eigenschaft in `prop` erreicht werden kann.

(f) Schreiben Sie ein Prädikat, mit dem man überprüfen kann, ob man einen Zustand mit einer bestimmten Eigenschaft ausgehend von einem beliebigen Zustand erreichen kann.

52. Gruppen

Eine Gruppe G ist ein Tupel $(G, *, 1)$ bestehend aus einer Menge von Elementen G, einer Funktion $* : G \times G \to G$ und einem ausgezeichneten Element $1 \in G$, so dass gilt:

(1) Inverse Elemente: zu jedem $x \in G$ gibt es ein $y \in G$ so dass gilt: $x * y = y * x = 1$

(2) Assoziativgesetz: für alle $x, y, z \in G$ gilt: $x * (y * z) = (x * y) * z$

(3) Neutrales Element: für alle $x \in G$ gilt: $1 * x = x * 1 = x$.

Aufgaben:

(a) Spezifizieren Sie die Struktur einer Gruppe in Alloy.

(b) Lassen Sie den Alloy Analyzer eine Gruppe mit drei Elementen generieren.

(c) Überprüfen Sie die Aussage, dass jedes Element einer Gruppe ein *eindeutiges* inverses Element hat mittels des Alloy Analyzers. Diskutieren Sie den Befund.

(d) Schreiben Sie eine `assert`-Anweisung zur Überprüfung, ob eine Gruppe *kommutativ* ist, d.h. ob für alle $x, y \in G$ gilt: $x * y = y * x$. Überprüfen Sie die Anweisung mit steigendem *Scope* beginnend bei 1.

53. Projektive Ebenen

Eine projektive Ebene ist eine Menge von Punkten und Geraden mit folgenden Eigenschaften:

(1) Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, auf der die Punkte liegen.

(2) Zu je zwei verschiedenen Geraden gibt es genau einen Punkt, in dem sich die Geraden schneiden.

(3) Auf jeder Geraden liegen wenigstens 3 Punkte.

(4) Durch jeden Punkt gehen mindestens 3 Geraden.

Aufgaben:

- Spezifizieren Sie die Struktur einer (endlichen) projektiven Ebene in Alloy.
- Zeigen Sie mit Alloy, dass die kleinste endliche projektive Ebene 7 Punkte und 7 Geraden hat.

54. Sudoku

In einem gelösten Sudoku kommen die Ziffern 1 bis 9 genau einmal in jeder Zeile, einmal in jeder Spalte und einmal in jedem Sektor (einem der 9 3x3-Subquadrate vor).

Gegeben sei folgendes Rätsel (Abb. 2):

(a) Schreiben Sie eine Alloy-Spezifikation für die Regeln von Sudoku. Hinweis: man kann Sudoku auffassen als ternäre Relation, bei der jedes Tupel (r, c, v) folgendes darstellt: r ist die Zeile (*row*), c ist die Spalte (*column*) und v ist der Wert (*value*) der entsprechenden Zelle.

(b) Geben Sie ein partielles Modell für die Relation vor – entsprechend der vorbelegten Ziffern im Rätsel und lassen Sie den Alloy Analyzer die Lösung finden.

(c) Wie „übersetzt“ Alloy wohl die Aufgabe in eine Formel der Aussagenlogik? (Denken Sie an die Aufgabe mit der Kartenfärbung)

55. Erdkunde-Klassenarbeit

Logelei aus dem ZEIT-Magazin vom 24.05.2007

> Claudia musste für den Erdkundeunterricht vier Berge auswendig lernen. Am nächsten Tag in der Klassenarbeit kann sie sich noch an Folgendes erinnern:

				9	7		1	
9	8			4		6		7
5	6							4
1			8					
		6		3	1			
4		2				3	8	
7		5		2			6	
	9							5
					6	4		

Abbildung 2: Sudoku

> Auf dem Felderer findet sich kein Steinhaufen.
> Der Berg in Barunien heißt weder Schneehorn, noch ist er 2317 Meter hoch.
> Auf einem der Berge war ein gigantischer Felsen.
> Weder der Berg in Gorabien noch der Felderer ist 2581 Meter hoch.
> Der Berg in Seborien ist 2128 Meter hoch.
> Das Schneehorn ist nicht 2222 Meter hoch.
> Der Berg mit der Hütte darauf ist weder 2222 Meter hoch noch der Borken, noch in Seborien.
> Der Berg in Gorabien ist nicht 2317 Meter hoch.
> Weder auf dem 2222 Meter hohen Berg noch auf dem Borken gibt es einen See. Es gab einen Weldberg.
>
> Claudia grübelt und grübelt, aber mehr will ihr partout nicht einfallen. Da fällt ihr auf, dass die Tafel nicht geputzt ist. Dort steht noch, wohl von einem Erdkundeunterricht der Parallelklasse: „In Lusanien steht der Borken“. Claudia ist erleichtert.
>
> Wie heißen die vier Berge, wie hoch sind sie, in welchem Land sind sie, und welche Besonderheit findet man auf den vier Gipfeln?

Man kann die Frage noch erweitern: Gibt es nur eine Lösung? Gibt es mehrere Lösungen, wenn die Tafel geputzt gewesen wäre?