Regeln des natürlichen Schließens

Aussagenlogik

	Einführung	*Elimination*
$\wedge$	$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\ \wedge\text{i}$	$\dfrac{\phi \wedge \psi}{\phi}\ \wedge\text{e}_1$ $\quad$ $\dfrac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge\text{e}_2$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi \vee \psi}\ \vee\text{i}_1$ $\quad$ $\dfrac{\psi}{\phi \vee \psi}\ \vee\text{i}_2$	$\dfrac{\phi \vee \psi \quad \boxed{\begin{matrix}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{matrix}}}{\chi}\ \vee\text{e}$
$\to$	$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}}{\phi \to \psi}\ \to\text{i}$	$\dfrac{\phi \quad \phi \to \psi}{\psi}\ \to\text{e, MP}$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}}{\neg\phi}\ \neg\text{i}$	$\dfrac{\phi \quad \neg\phi}{\bot}\ \neg\text{e}$
RAA, $\bot$	$\dfrac{\boxed{\begin{matrix}\neg\phi\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}}{\phi}\ \text{RAA}$	$\dfrac{\bot}{\phi}\ \bot\text{e, EFQ}$

Einige abgeleitete Regeln der Aussagenlogik

$$\dfrac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg\text{i} \qquad\qquad \dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg\text{e}$$

$$\dfrac{\phi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\ \text{MT} \qquad\qquad \dfrac{}{\phi \vee \neg\phi}\ \text{TND}$$

Prädikatenlogik

	Einführung	*Elimination*
$=$	$\dfrac{}{t = t}$ $= \mathsf{i, ID}$	$\dfrac{t_1 = t_2 \quad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]}$ $= \mathsf{e, SUB}$
$\forall$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{l} x_0 \\ \quad\vdots \\ \quad\phi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \phi}$ $\forall \mathsf{x\ i}$	$\dfrac{\forall x \phi}{\phi[t/x]}$ $\forall \mathsf{x\ e}$
$\exists$	$\dfrac{\phi[t/x]}{\exists x \phi}$ $\exists \mathsf{x\ i}$	$\dfrac{\exists x \phi \quad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & \phi[x_0/x] \\ & \vdots \\ & \chi \end{array}}}{\chi}$ $\exists \mathsf{x\ e}$

Bemerkung

In allen Substitutionen $\phi[t/x]$ muss t frei für x in der Formel ϕ sein, d.h. kein freies Vorkommen von x in ϕ darf im Bereich eines Quantors $\forall y$ oder $\forall y$ für eine Variable y in t sein.

Neu eingeführte Variablen x_0 dürfen nirgendwo außerhalb ihres Gültigkeitsbereichs erscheinen.