

Darstellung von Gleitkommazahlen nach IEEE-757

- Halblogarithmische Darstellung von Gleitkommazahlen
- Schema zur Addition und Subtraktion
- Schema zur Multiplikation und Division



Halblogarithmische Darstellung

Für die Darstellung gebrochener (reeller) Werte werden Gleitkommazahlen in **halblogarithmischer Form** verwendet:

$$\text{Zahlenwert} = \pm m \cdot b^e$$

m : Mantisse

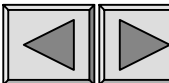
b : Basis = 2

e : Exponent

Die Speicherung erfolgt (durch Wahl von e) in normierter Form nach **IEEE-757**:

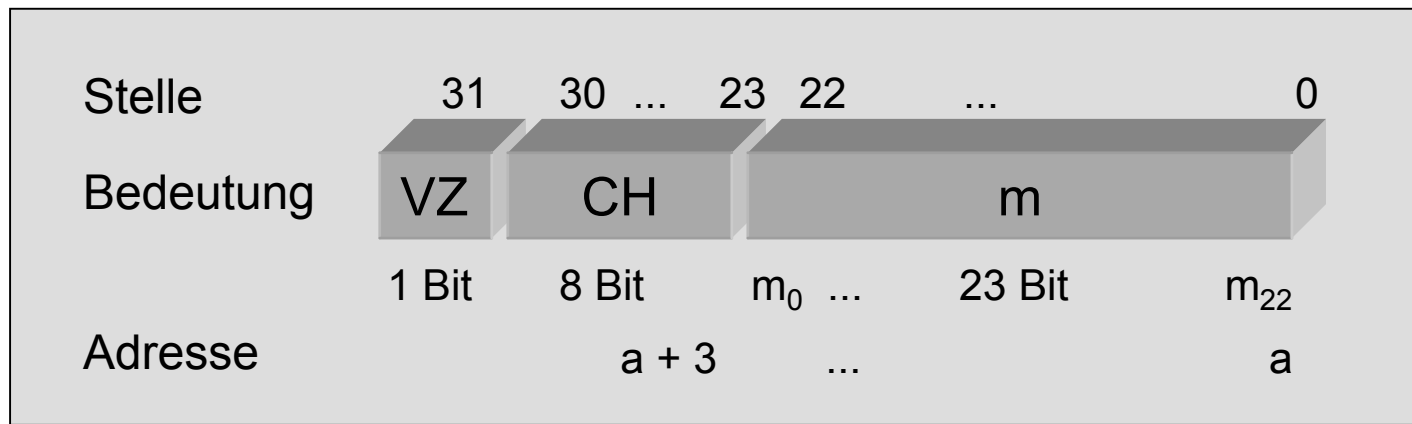
$$\pm 1.m_0 m_1 \dots m_{nm} \cdot 2^{e - \text{bias}}$$

Vorteil: Die erste Stelle ist immer “1” und braucht nicht gespeichert zu werden.

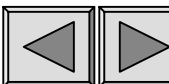


Format “Short Real”

Beispiel: Format *Short Real* für Intel Prozessoren.



Vorzeichenfeld VZ: gesetzt (1) \Rightarrow Minus (-)
 nicht gesetzt (0) \Rightarrow Plus (+)



Charakteristik

(1)

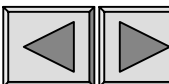
Exponentenfeld CH: repräsentiert den Multiplikator $2^e - \text{bias}$, der den Zahlenbereich festlegt. Es wird nicht der Exponent selbst, sondern die sog. *Charakteristik CH* eingetragen:

$$CH := e + \text{bias}; \quad \text{bias} := 2^{ne-1} - 1$$

ne bezeichnet die Zahl der Binärstellen im Exponentenfeld. Für das Format *Short Real* gilt: $ne = 8 \Rightarrow \text{bias} = 2^{8-1} - 1 = 127$. D.h.

$$CH = 130 \text{ repräsentiert} \quad 2^{CH-\text{bias}} = 2^{130-127} = 2^3.$$

$$CH = 117 \text{ repräsentiert} \quad 2^{CH-\text{bias}} = 2^{117-127} = 2^{-10}.$$

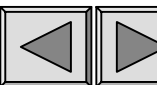
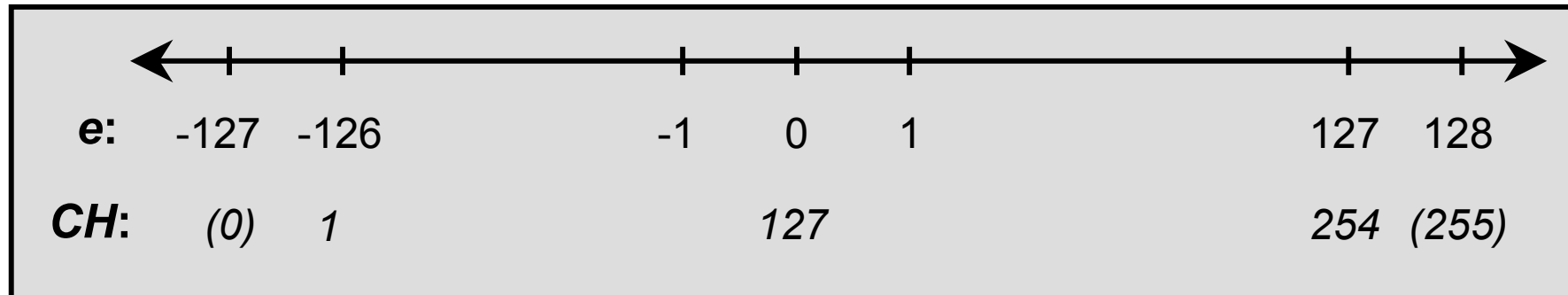


Charakteristik

(2)

Exponentenfeld **CH** (Forts.):

- $CH = 0$ und $CH = 255$ sind reserviert und signalisieren spezielle Werte.
- Die Addition eines bias bedeutet die Verschiebung der neg. Zahlen auf der Zahlengeraden nach rechts in den positiven Bereich



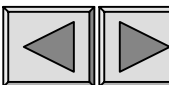
Mantisse

Mantissenfeld m : Enthält die Nachkommastellen $m_0 \dots m_{22}$ der Fließkommazahl und bestimmt damit die Genauigkeit der Darstellung.

Der Absolutwert einer Fließkommazahl im Format Short Real ist demnach als

$$\text{Absolutwert} = 1.m_0 m_1 \dots m_{22} \cdot 2^{CH - 127}$$

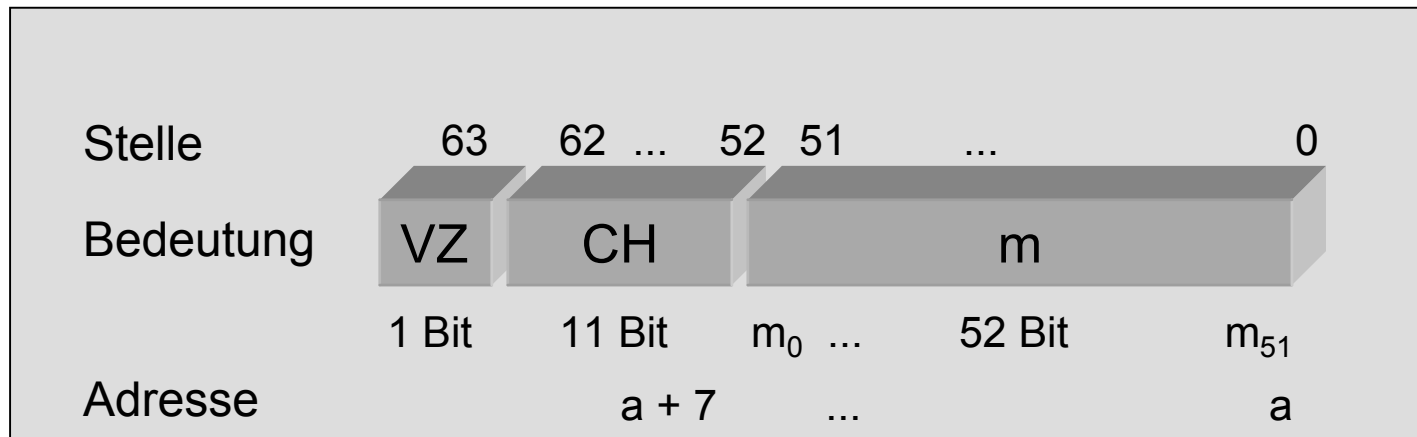
zu interpretieren.



Format “Long Real”

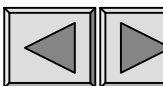
Für Intel-Prozessoren gibt es zwei weitere Formate für Fließkommawerte.

Format *Long Real*



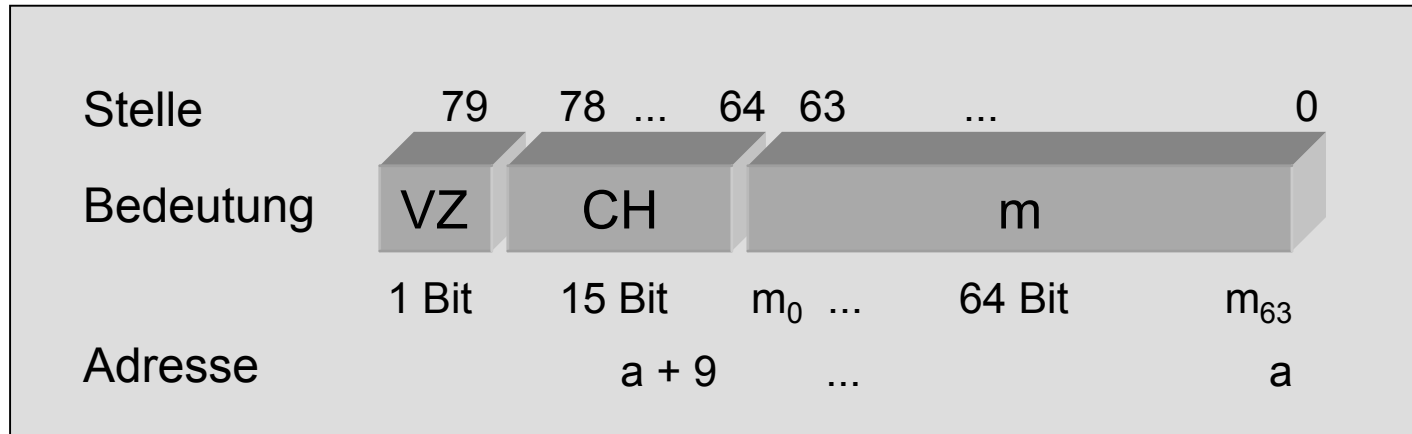
$$bias = 2^{11-1} - 1 = 1023$$

$$Absolutwert = 1.m_0 m_1 \dots m_{51} \cdot 2^{CH - 1023}$$



Format “Temp Real”

Format *Temp Real*



$$bias = 2^{15-1} - 1 = 16383$$

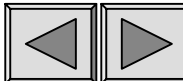
$$\text{Absolutwert} = m_0.m_1 \dots m_{63} \cdot 2^{CH - 16383}$$

Man beachte die gegenüber *Short* und *Long Real* nicht normierte Form der Mantisse.



Schema zur Addition und Subtraktion

1. Ermitteln von Vorzeichen, Mantisse und Exponent pro Operand.
2. Angleichen der Exponenten durch Kommaverschiebung in einer Mantisse.
3. Addition (Subtraktion) der Mantissen.
4. Normieren und Speichern der Mantisse.
5. Berechnen und Speichern der Charakteristik.
6. Speichern des Vorzeichens.



Beispiel: $5,0 - 0,625 = 4,375$ (1)

Operand a im Format *Short Real*

$a = 5,0$

0	1000 0001	0100	... 0
---	-----------	------	-------

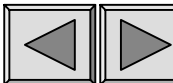
1a) Ermitteln von Vorzeichen, Exponent und Mantisse von a :

$VZ = +$

$e_a = CH - 127 = 129 - 127 = 2$

$m_a = 1,01$

$\Rightarrow a = +1,01 \cdot 2^2 = +101 \cdot 2^0 = +5_{10}$



Beispiel: $5,0 - 0,625 = 4,375$ (2)

Operand b im Format *Short Real*

$b = -0,625$

1	0111 1110	0100	... 0
---	-----------	------	-------

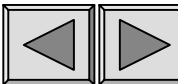
1b) Ermitteln von Vorzeichen, Exponent und Mantisse von b :

$VZ = -$

$e_b = CH - 127 = 126 - 127 = -1$

$m_b = 1,01$

$\Rightarrow b = -1,01 \cdot 2^{-1} = -0,101 \cdot 2^0 = -0,625_{10}$



Beispiel: $5,0 - 0,625 = 4,375$ (3)

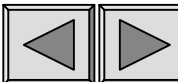
2) Angleichen der Exponenten:

$$a = +1,01 \cdot 2^2 \quad b = -1,01 \cdot 2^{-1} = -0,00101 \cdot 2^2 \Rightarrow e_{a+b} = e = 2$$

3) Subtraktion der Mantissen:

$$\begin{array}{r} 1,01000 \\ - 0,00101 \\ \hline + 1,00011 \end{array} \quad \Rightarrow m_{a+b} = 1,00011$$

Anmerkung: Die Subtraktion wird auf dem Rechner durch Addition im 2er-Komplement durchgeführt.



Beispiel: $5,0 - 0,625 = 4,375$ (4)

4) Normieren und Speichern der Mantisse des Ergebnisses:

Die Mantisse liegt bereits in normierter Form vor und kann unter Weglassen der führenden “1” gespeichert werden.

5) Berechnen und Speichern der Charakteristik des Ergebnisses:

$$CH = e + 127 = 2 + 127 = 129_{10} = 1000\ 0001_2 .$$

6) Speichern des Vorzeichens des Ergebnisses:

$$VZ = + \Rightarrow \text{“0”}$$

Als Ergebnis wird gespeichert:

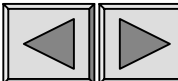
0	1000 0001	000110	... 0
---	-----------	--------	-------



Schema zur Multiplikation und Division

1. Ermitteln von Vorzeichen, Mantisse und Exponent pro Operand.
2. Multiplikation (Division) der Beträge der Mantissen.
3. Normierung und Speichern des Ergebnisses.
4. Angleich eines Exponenten entsprechend der Normierung.
5. Addition (Subtraktion) der Exponenten.
6. Berechnung und Speichern der Charakteristik.
7. Festlegen und Speichern des Vorzeichens.

Beachte: Bei der Division muss der Nenner (Divisor) $\neq 0$ sein!



Erläuterung von Schritt 4 am Beispiel Division

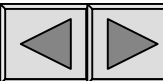
$$\frac{a}{b} = \frac{m_a}{m_b} \cdot 2^{e_a - e_b} = m \cdot 2^{e_a - e_b} = m_N \cdot 2^{e_a - e_b + e_N}$$

$$\frac{a}{b} = m_N \cdot 2^e$$

wobei

m_N : normierte Mantisse \Rightarrow Exponent e_N

$$e = e_a - e_b + e_N = \tilde{e}_a - e_b$$



Beispiel: $-8,125 : 5 = -1,625$ (1)

Operand a im Format *Short Real*

$$a = -8,125: \quad \boxed{1 \mid 1000\ 0010 \mid 0000010 \quad \dots \ 0}$$

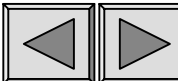
1a) Ermitteln von Vorzeichen, Exponent und Mantisse von a :

$$VZ = -$$

$$e_a = CH - 127 = 130 - 127 = 3$$

$$m_a = 1,000001$$

$$\Rightarrow a = -1,000001 \cdot 2^3 = -1000,001 \cdot 2^0 = -8,125_{10}$$



Beispiel: $-8,125 : 5 = -1,625$ (2)

Operand b im Format *Short Real*

$b = +5,0$:

0	1000 0001	01000000 ... 0
---	-----------	----------------

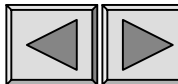
1b) Ermitteln von Vorzeichen, Exponent und Mantisse von b :

$$VZ = +$$

$$e_b = CH - 127 = 129 - 127 = 2$$

$$m_b = 1,01$$

$$\Rightarrow b = + 1,01 \cdot 2^2 = +101,0 \cdot 2^0 = +5,0_{10}$$



Beispiel: $-8,125 : 5 = -1,625$ (3)

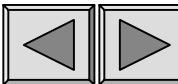
2) Division der Beträge der Mantissen

$$\frac{m_a}{m_b} = \frac{1,000001}{1,01} = \frac{100,0001}{101} = 0,1101$$

3) Normierung der Mantisse

$$\frac{m_a}{m_b} = 0,1101 \cdot 2^0 = 1,101 \cdot 2^{-1}$$

$$m_N = 1,101 \quad e_N = -1$$



Beispiel: $-8,125 : 5 = -1,625$ (4)

4) Angleich des Exponenten e_a

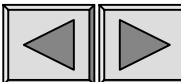
$$\tilde{e}_a = e_a + e_N = 3 + (-1) = 2$$

5) Subtraktion der Exponenten

$$e = \tilde{e}_a - e_b = 2 - 2 = 0$$

6) Berechnung der Charakteristik

$$CH = e + 127 = 0 + 127 = 127$$

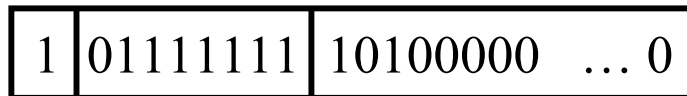


Beispiel: $-8,125 : 5 = -1,625$ (5)

7) Berechnung des Vorzeichens

$- / + \Rightarrow -$ D.h. VZ = 1

8) Gespeichertes Ergebnis im Format Short Real



Dies entspricht $-1,101 \cdot 2^0 = -1,625$

