

6.1.5. Berechnung bestimmter Integrale

$$\text{Bsp.: } \int_1^2 x^2 dx = ?$$

$$\text{Stammfunktion: } \int_a^x x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c$$

Bestimmung der Konstanzen c :

$$0 = \int_1^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot 1^3 + c \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{3} 1^3 + c \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3} 1^3$$

$$\text{Somit } \int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} 1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

Wichtig : Hierbei wurde zur Bestimmung des Ergebnisses lediglich der Hauptsatz der Differential - Integralrechnung verwendet ("Welche Fkt. muß man ableiten, damit man $f(x) = x^2$ erhält?"), d.h. die langwierige Berechnung von komplizierten Summen (siehe 6.1.1) entfällt!

Allgemein :

$$\text{Gesucht: } \int_a^b f(x) dx$$

1. Suche eine Stammfkt. $F(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$

Allg. Stammfkt. hat dann die Darstellung $F(x) + c$

$$\text{d.h. } \int_a^x f(x) dx = F(x) + c$$

2. Bestimme Konstante c :

$$0 = \int_a^a f(x) = F(a) + c \Leftrightarrow c = -F(a)$$

$$\text{Mit } c = -F(a) \text{ erhalten wir } \int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)$$

Das bestimmte Integral ($x = b$) wird dann wie folgt berechnet :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

wobei $F(x)$ Stammfunktion ist (d.h. $F'(x) = f(x)$)

$$\text{Schreibweise: } \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$$

Anm.: In manchen Fällen kann keine Stammfkt. angegeben werden, d.h. es existiert keine Integraldarstellung in geschlossener Form.

Dann: Einsatz von numerischem Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen.

Bsp.:

$$(1) \quad \int_1^3 x^3 dx = ?$$

Stammfkt.:

$$F(x) = \frac{1}{4} x^4$$

$$\begin{aligned} \text{Somit: } \int_1^3 x^3 dx &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^3 = \frac{1}{4} \cdot 3^4 - \frac{1}{4} \cdot 1^4 \\ &= \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int_0^{\pi} \sin x \, dx = ?$$

Stammfkt.: $F(x) = -\cos x$

$$\begin{aligned} \text{Somit: } \int_0^{\pi} \sin x \, dx &= [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) \\ &= (1) - (-1) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \int_{-1}^0 x^3 dx = ?$$

Stammfkt.: $F(x) = \frac{1}{4} x^4$

$$\int_{-1}^0 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_{-1}^0 = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{4} (-1)^4 = 0 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

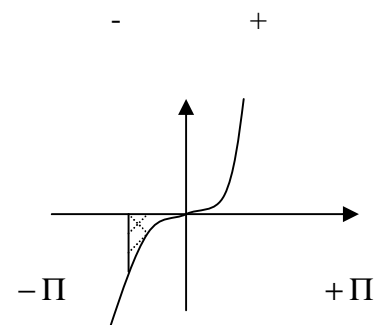
Integral ist negativ, da Funktionswert negativ!

$$(4) \quad \int_1^0 x^3 dx = ?$$

$$\int_1^0 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^0 = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{4} (1)^4 = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

Integral ist negativ, da Δx negativ!

(Untergrenze 1, Obergrenze 0 $\Rightarrow \Delta x$ neg.)

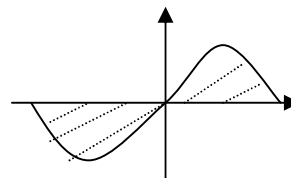


$$(5) \quad \int_0^{-1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^{-1} = \frac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 = \frac{1}{4}$$

Integral positiv, da Δx negativ und Funktionswerte negativ!

$$(6) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin \pi - \sin(-\pi) = 0 - 0 = 0$$

Positiver und negativer Anteil heben sich auf.



Zusammenfassend:

Soll statt des Integrals die Fläche bestimmt werden, muß man auf die Vorzeichen achten.

6.1.6. Integrationsregeln

Faktorregel :

$$\begin{aligned} \text{Bsp.:} \quad \int_a^b 2 \cdot x^2 dx &= \left[2 \cdot \frac{1}{3} x^3 \right]_a^b = 2 \cdot \frac{1}{3} b^3 - 2 \cdot \frac{1}{3} a^3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3 \right) \\ &= 2 \cdot \left(\left[\frac{1}{3} x^3 \right]_a^b \right) = 2 \cdot \int_a^b x^2 dx \end{aligned}$$

Allg.: Sei c konstanter Faktor, so gilt :

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (\text{Faktor kann vorgezogen werden})$$

Summenregel :

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos x + e^x dx &= \left[(\sin x + e^x) \right]_a^b = (\sin b + e^b) - (\sin a + e^a) \\ &= [\sin x]_a^b + [e^x]_a^b = \int_a^b \cos x dx + \int_a^b e^x dx \end{aligned}$$

Allg.: Eine endliche Summe darf einzeln integriert werden.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$$

Vertauschen der Integrationsgrenzen

$$\int_1^2 \cos x dx = [\sin x]_1^2 = \sin 2 - \sin 1 = -(\sin 1 - \sin 2)$$

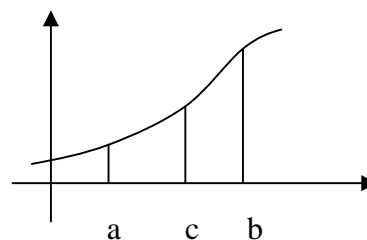
$$= [-(\sin x)]_2^1 = -\int_2^1 \cos x dx$$

Also: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

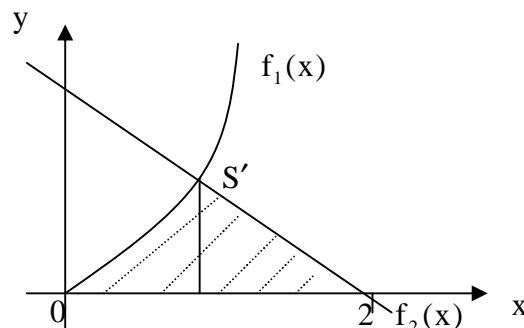
Zerlegung in Teilintervalle

Sei $a < c < b$, dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



Bsp.: Gesucht ist die Fläche, die von den Kurven $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x + 2$ und der positiven x - Achse eingeschlossen wird.



Berechnung des Schnittpunktes S' :

$$x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \quad x_1 = 1 \quad x_2 = -2 < 0$$

Somit

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right) \\ &= \frac{1}{3} - 0 - 2 + 4 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

6.2 Analytische Integrationsmethoden

- Methoden zur Rückführung komplizierter Integrale auf einfache Integrale

6.2.1 Integration durch Substitution

Bsp.: $\int x \cdot (\cos x^2) dx = ?$

Bekannt: $(\sin x)' = \cos x$

Aber Argument ist x^2 : $(\sin x^2)' = ?$ $f(x) = \sin x^2$

Substitution: $u = x^2$

Dann $f(u) = \sin u$ $u(x) = x^2$

$$f'(x) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ (Kettenregel)}$$

$$= (\cos u) \cdot 2x = (\cos x^2) \cdot 2x$$

Gesucht ist Fkt. $F(x)$ mit $F'(x) = x \cdot (\cos x^2)$

Lösung: $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x^2$

$$F'(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot \sin x^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot (\sin x^2)'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2x \cdot (\cos x^2)) = x \cdot \cos x^2$$

Somit: $\int x \cdot (\cos x^2) dx = \frac{1}{2} \cdot \sin x^2 + c$

Ziel: Substitution $u = x^2$ soll direkt im Integral verwendet werden, so daß Lösung des Integrals einfacher dargestellt werden kann.

Substitution: $u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$

$$\underline{dx = \frac{du}{2x}}$$

Dann: $\int x \cdot (\cos x^2) dx = \int x \cdot \cos u \frac{du}{2x}$

$$= \int \frac{x}{2x} \cdot \cos u du = \int \frac{1}{2} \cos u du$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + c$$

$$= \frac{1}{2} \sin x^2 + c$$

Zusammenfassung :

1. Aufstellen einer Substitutionsgleichung

$$u = g(x) \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$$

2. Substitution im Integral

$$f(x)dx = f(x) \cdot \frac{du}{g'(x)} = \frac{f(x)}{g'(x)} du = \varphi(u) du$$

$$\downarrow$$

$$= \varphi(u)$$

Wichtig : in $\varphi(u)$ muß die Variable x vollständig durch u ersetzt werden

$$\text{Dann : } \int f(x) dx = \int \varphi(u) du$$

$$3. \text{ Berechne } \int \varphi(u) = \Phi(u) + c$$

4. Rücksubstitution in $\Phi(u)$ zur Bestimmung der Stammfkt.

$$\int f(x)dx = \Phi(u) + c = \Phi(g(x)) + c = F(x) + c$$

Anm.: 4. kann bei Berechnung des bestimmten Integrals entfallen, falls man Integrationsgrenzen anpaßt(aber nur dann!).

Bsp.:

$$(1) \int \frac{\ln x}{x} dx = ?$$

$$\text{Substitutionsgleichung : } u = \ln x \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad dx = x \cdot du$$

$$\text{Substitution im Integral : } \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{u}{x} x \cdot du = \int u du$$

$$\text{Berechnen : } \int u du = \frac{1}{2} u^2 + c$$

$$\text{Rücksubstitution : } \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} (\ln x)^2$$

$$\text{Somit : } \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c$$

(2) Berechnen eines bestimmten Integrals durch Substitution

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 2)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2 \approx 0,24$$

$$(3) \quad \int_1^2 4 \cdot (4x - 3)^8 dx = ?$$

$$u = 4x - 3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Somit: } \int 4 \cdot (4x - 3)^8 dx &= \int 4 \cdot u^8 \frac{du}{4} = \int u^8 du \\ &= \frac{1}{9} u^9 + c = \frac{1}{9} (4x - 3)^9 + c \end{aligned}$$

$$(4) \quad \int \sin^5 x \cdot \cos x dx = ?$$

$$u = \sin x \quad \frac{du}{dx} = \cos x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} &= \int u^5 \cdot \cos x \frac{du}{\cos x} = \int u^5 du \\ &= \frac{1}{6} u^6 + c = \frac{1}{6} \sin^6 x + c \end{aligned}$$

$$(5) \quad \int_0^2 x \cdot x^2 dx = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 = \underline{\underline{4}}$$

$$\text{Alternativ mit Substitution: } u = x^2 \quad \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x \cdot x^2 dx = \int x \cdot u \frac{du}{2x} = \int \frac{u}{2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{4} u^2 + c$$

$$\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} u^2 \right]_0^2 = \underline{\underline{1}} \neq \underline{\underline{4}} \quad \text{Wieso?}$$

Berücksichtigung der Grenzen bei der Substitution :

$$\text{Gesucht: } \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{Substitution: } u = g(x)$$

$$\text{Einsetzen ergibt: } f(x) dx = h(u) du$$

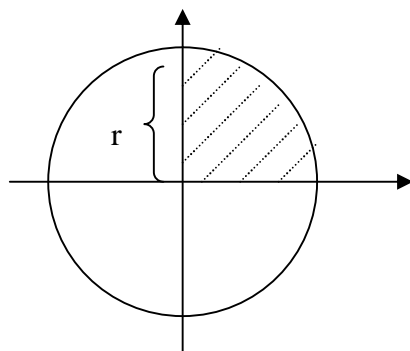
$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(u) du$$

d.h. Grenzen müssen substituiert werden!

Alternative: Lsg. des unbestimmten Integrals $\int f(x) dx = \dots = F(x)$ und anschließend

Lsg. des bestimmten Integrals mit der gefundenen Stammfkt..

(6) Berechnen der Kreisfläche



$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad r = \text{Radius}$$

Kreisfläche = 4 * Fläche im I. Quadranten

Fläche im I. Quadranten : $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = ?$

Substitution : $x = r \cdot \sin u \Rightarrow \frac{dx}{du} = r \cdot \cos u \Leftrightarrow dx = r \cdot \cos u du$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2 u} \cdot r \cdot \cos u dx = \int r \cdot \cos u \cdot r \cdot \cos u du \\ &= \int r^2 \cos^2 u du \end{aligned}$$

da $\sqrt{r^2 \cdot (1 - \sin^2 u)} = r \cdot \sqrt{1 - \sin^2 u} = r \cdot \cos u$

Betrachtung der Integralgrenzen :

$$x = r \cdot \sin u \Leftrightarrow \frac{x}{r} = \sin u \Rightarrow u = \arcsin \frac{x}{r}$$

Untergrenze : $x = 0 \rightarrow u = \arcsin \frac{0}{r} = 0$

Obergrenze : $x = r \rightarrow u = \arcsin \frac{r}{r} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

Somit :

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \cos^2 u du$$

Verwenden : $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$

$$\begin{aligned} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du &= \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du = \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du + \frac{r^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u du \\ &= \left[\frac{r^2}{2} u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4} \end{aligned}$$

Somit folgt Kreisfläche

$$= 4 \cdot \frac{\Pi r^2}{4} = \Pi r^2$$

Bleibt $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos 2u \, du = 0$

Substitution: $t = 2u \quad \frac{dt}{du} = 2 \Leftrightarrow \frac{dt}{2} = du$

Integralgrenzen:

Untergrenze: $u = 0 \Rightarrow t = 2 \cdot 0 = 0$

Obergrenze: $u = \frac{\Pi}{2} \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{\Pi}{2} = \Pi$

Somit: $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} \cos 2u \, du = \frac{1}{2} \int_0^{\Pi} \cos t \, dt = \frac{1}{2} [\sin t]_0^{\Pi}$
 $= \frac{1}{2} (\sin \Pi - \sin 0) = 0$