

Bsp: $f(t) = t^2$

$$\left\{ F_n(x) = \int_n^x f(t) dt; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \left\{ \text{unbestimmte Integrale von } f(t) = t^2 \right\}$$

Sei $n < m$

$$F_n(x) - F_m(x) = \int_n^m f(t) dt + \int_m^x f(t) dt$$

↑

Konstante

Zusammenhang zwischen Integration und Diff. am Bsp. der Parabel

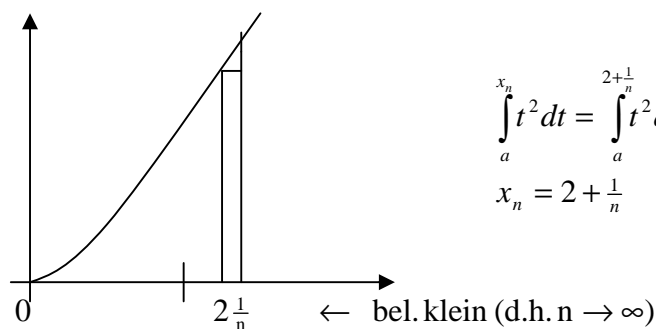
$$f(t) = t^2 \quad F(x) = \int_a^x t^2 dt = ?$$

Frage: Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Fkt. $F(x)$ und dem Integranden

$$f(t) = t^2 ?$$

Exemplarische Herleitung des Hauptsatzes der D + I – Rechnung mit $x = 2$

Frage: Wie ändert sich das Integral, wenn man statt $\int_a^2 t^2 dt$ $\int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt$ betrachtet?



$$\int_a^{x_n} t^2 dt = \int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt$$

$$x_n = 2 + \frac{1}{n}$$

Abschätzung:

$$\frac{1}{n} \cdot 2^2 = \frac{1}{n} * \text{kleinster Fkt. - Wert} \leq \text{Fläche exakt} \leq \frac{1}{n} * \text{größter Fkt. - Wert} = \frac{1}{n} \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt = \int_a^2 t^2 dt + \int_2^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt - \int_a^2 t^2 dt = \int_2^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt =$$

$$\frac{1}{n} 2^2 \leq \int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt - \int_a^2 t^2 dt \leq \frac{1}{n} \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 \quad / \div \frac{1}{n}$$

$$2^2 \leq \frac{\int_a^{2+\frac{1}{n}} t^2 dt - \int_a^2 t^2 dt}{\frac{1}{n}} \leq \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Betrachten wir den Grenzwert für $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, d.h.

$$\lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} f(2) \leq \lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \frac{F(2 + \frac{1}{n}) - F(2)}{\frac{1}{n}} \leq \lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} f(2 + \frac{1}{n})$$

$$= f(2) \quad = F'(2) \quad = f(2)$$

$$\Rightarrow f(2) \leq F'(2) \leq f(2) \Rightarrow F'(2) = f(2)$$

Die Herleitung gilt allgemein für eine beliebige Obergrenze a :

$$f(a) \leq F'(a) \leq f(a) \Rightarrow F'(a) = f(a)$$

$$f(a) = a^2 \Rightarrow F'(a) = a^2$$

$$\Rightarrow F(a) = \frac{a^3}{3} + c$$

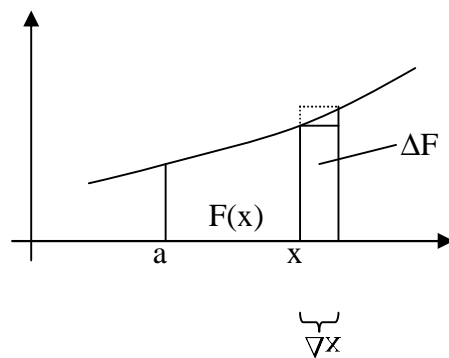
oder :

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \quad \leftarrow \text{Stammfkt.}$$

6.1.4 Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f(t)$ eine beliebige stetige Funktion.

Wir betrachten $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ mit gewählter Untergrenze a



Abschätzung:

kleinstes Rechteck

$$\Delta x \cdot \min f(t) \leq F(x + \Delta x) - F(x)$$

$$t \in [x, x + \Delta x]$$

größtes Rechteck

$$\Delta x \cdot \max f(t) \geq F(x + \Delta x) - F(x)$$

$$t \in [x, x + \Delta x]$$

$/: \Delta x$

$$\min f(t) \leq \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq \max f(t)$$

\downarrow

\downarrow

$$f(x) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq f(x)$$

$$= F'(x)$$

$$\Rightarrow \underline{F'(x) = f(x)}$$

$$\text{mit } F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$\Rightarrow f(x)$ ist gegeben, d.h. gesucht ist eine Funktion deren Ableitung $f(x)$ ergibt

Fundamentalsatz der D+I Rechnung

Sei $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ eine bel. Stammfunktion so gilt $F'(x) = f(x)$

Beispiele :

Gesucht ist die Stammfunktion $F(x)$ zur Fkt. $f(x)$, d.h. $\int f(x) dx = F(x) + c$

(Integrationsgrenzen können bei der Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$ weggelassen werden)

$$(1) \int (4x + 3) dx = ?$$

Gesucht : irgendeine Stammfunktion $F(x)$ mit

$$F'(x) = 4x + 3$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$(2x^2)' (3x)'$$

Somit ist $F(x) = 2x^2 + 3x$ eine Stammfunktion.

Menge aller Stammfkt. zur Fkt. $f(x) = 4x + 3$ ist $M_{\text{St.}}$:

$$M_{\text{St.}} = \{ 2x^2 + 3x + c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \text{ konstant} \}$$

$$F_c(x) = 2x^2 + 3x + c$$

$$\Rightarrow F'_c(x) = 4x + 3 + 0$$

$$(2) \int e^x dx = ?$$

$$\uparrow$$

$$(e^x)'$$

$$F(x) = e^x + c$$

$$(3) \int x^5 dx = ?$$

$$\uparrow$$

$$(\frac{1}{6}x^6)'$$

$$F(x) = \frac{1}{6}x^6 + c$$

$$(4) \int x^n dx = ?$$

$$\uparrow$$

$$(\frac{1}{n+1}x^{n+1})'$$

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$$

$$(5) \int \cos x dx = ?$$

$$\uparrow$$

$$(\sin x)'$$

$$F(x) = \sin x + c$$

$$(6) \int (e^x + x^7) dx = e^x + \frac{1}{8}x^8 + c$$

$$(7) \int 5x^4 - \cos x dx = 5 \cdot \frac{1}{5}x^5 - \sin x + c \\ = x^5 - \sin x + c$$