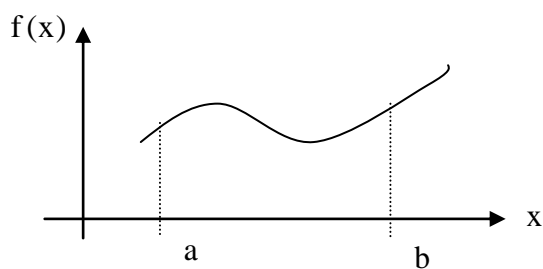


## 6. Integralrechnung

### 6.1. Grundlagen

#### 6.1.1. Das bestimmte Integral als Flächeninhalt

Gegeben sei  $f(x)$  mit  $f(x) > 0$  auf Intervall  $[a, b]$



Gesucht:

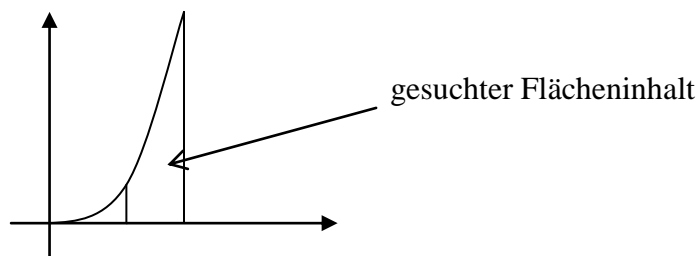
Flächeninhalt der von den Intervallgrenzen  $a$  und  $b$  von der Funktionskurve  $f(x)$  und von der  $x$ -Achse bestimmten Fläche

Genauer: Gesucht ist ein Rechenverfahren

Lösungsansatz: Wähle einfaches Bsp.:

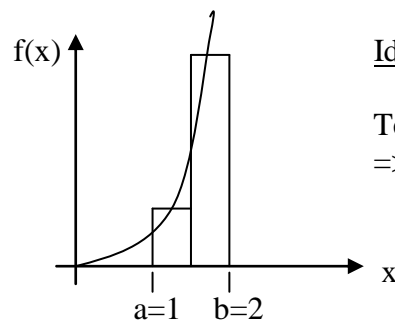
$$f(x) = x^2; \quad a = 1 \quad b = 2$$

Skizze:



Lösungsidee:

1. Bestimmung eines Näherungswertes und verbessern des Näherungswertes
2. Der Grenzwert des Näherungswertes soll exaktes Ergebnis liefern  
( siehe: Bestimmung der Ableitung einer Funktion )

**1. Bestimmung eines Näherungswertes und verbessern des Näherungswertes**

Idee: Verwende Rechtecke

Teile Abszisse (x-Achse) in n gleiche Teile  
=> Breite des Rechteckes

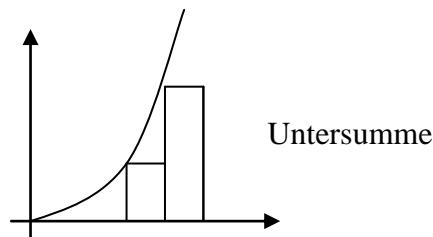
Problem: Was ist die richtige Höhe?

Klar: Kleinster Funktionswert  $\leq$  Höhe  $\leq$  größter Funktionswert

Wähle zwei unterschiedliche Ansätze:

**1. Ansatz:** Untersumme

d.h. als Höhe wird kleinster Funktionswert in dem betreffenden Intervall verwendet



Für  $f(x) = x^2$  in  $[1, 2]$  erhalten wir

$n = 2$  Teile :

$$U_2 = \frac{(2-1)}{2} \cdot f(1) + \frac{(2-1)}{2} \cdot f(1,5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (f(1) + f(1,5)) = \frac{1}{2} \cdot (1 + (1,5)^2) = 1,625$$

$n = 5$  Teile :

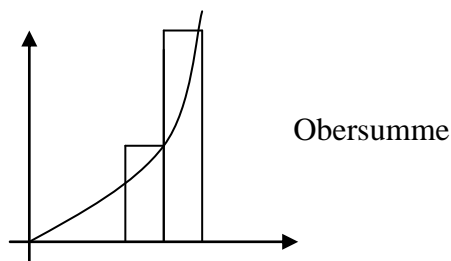
$$U_5 = \frac{2-1}{5} (f(1) + f(1,2) + f(1,4) + f(1,6) + f(1,8)) = 2,04$$

Je feiner die Aufteilung des Intervalls  $[a, b]$  auf der x-Achse wird, desto größer wird die Untersumme

Klar ist: Die Untersumme ist kleiner und im Grenzfall höchstens gleich dem Flächeninhalt

**2. Ansatz:** Obersumme

d.h. als Höhe wird der größte Funktionswert in dem betreffenden Intervall verwendet.



Für  $f(x) = x^2$  in  $[1, 2]$  erhalten wir

$n = 2$  Teile

$$O_2 = \frac{(2-1)}{2} \cdot (f(1,5) + f(2)) = 3,125$$

$$= \frac{(2-1)}{5} \cdot (f(1,2) + f(1,4) + f(1,6) + f(1,8) + f(2)) = 2,64$$

Klar ist: Die Obersumme ist größer und im Grenzfall höchstens gleich dem Flächeninhalt. Je feiner die Aufteilung des Intervalls  $[a, b]$  auf der x-Achse wird, desto kleiner wird die Obersumme.

**Zusammenfassend:**

$$\text{Untersumme} \leq \text{Flächeninhalt} \leq \text{Obersumme}$$



monoton  
steigend



monoton  
fallend

**3. Grenzwert**

"Experimentell:"

$$U_2 = 1,625$$

$$U_5 = 2,04$$

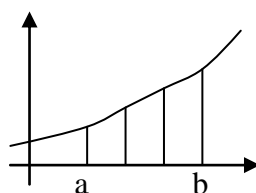
$$U_{100} = ?$$

**Programm zur Berechnung der Untersumme****1. Analyse** (Was ist zu tun?)

Sei  $f(x)$  auf dem Intervall  $[a, b]$  stetig und monoton wachsend.

Das Intervall wird in  $n$  gleiche Teile zerlegt mit der Breite:

$$h = \frac{b-a}{n}$$



Berechnung der Untersumme:

$U_n$  = Summe der Rechtecke  
 pro Rechteck wird der Funktionswert an der linken Seite genommen (da monoton wachsend) und mit der Breite  $h$

## 2. Design

$$\begin{aligned} U_h &= h \cdot f(a) + h \cdot f(a + 1 \cdot h) + \dots + h \cdot f(a + 2h) + \dots h \cdot f(a + (h-1) \cdot h) \\ &= h \cdot (f(a) + f(a + 1 \cdot h) + f(a + 2 \cdot h) + \dots f(a + (n-1) \cdot h)) \\ &= h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i \cdot h) \end{aligned}$$

$$U_h = \left( \frac{b-a}{n} \right) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f \left( a + i \frac{(b-a)}{n} \right)$$

## BASIC-Programm

Programm besteht aus Zeilen  
 Zeile besteht aus "Zeilennummer Befehl"

### Befehle:

REM  $\Leftrightarrow$  Kommentarzeile  
 Bsp.: 10 REM Text

INPUT Variable  $\Leftrightarrow$  Eingabe  
 Bsp.: 100 INPUT x  
 verlangt vom Benutzer Eingabe eines Wertes der in der Variablen x abgelegt wird.

PRINT  $\Leftrightarrow$  Ausgabe  
 Bsp.: 200 PRINT " Wert "; x  
 Es wird der Text " Wert " und der Wert der Variablen x ausgegeben.

Bsp.:

```
150 RUN *** Ein-Ausgabebeispiel ***
200 INPUT " Eingabe "; A
205 PRINT " Eingabewert war "; A
210 END
```

Abarbeiten des Programms erfolgt Zeile für Zeile, wobei innerhalb einer Zeile ein Sprungbefehl in eine andere Zeile gegeben werden kann.

Zuweisung: =

Bsp.: 15 A= 5

Der Variablen A wird der Wert 5 zugewiesen.  
 ( nicht das = der Mathematik )

Schleife:

FOR Variable = Startwert TO Endwert

.... Schleifenkörper

....

NEXT Variable

Bsp.: 100 FOR I=1 TO 3

110 PRINT I

120 Next I

130 ...

- |                      |            |  |
|----------------------|------------|--|
| 1. Durchlauf I=1     | Ausgabe: 1 | Zeile 120 I um 1 erhöhen                 |
| 2. Durchlauf I=1+1=2 | Ausgabe: 2 | ...                                      |
| 3. Durchlauf I=3     | Ausgabe: 3 | Weiter mit Zeile 130 da Endwert erreicht |

Rechenoperatoren:

+ Addition

\* Multiplikation

– Subtraktion

/ Division

^ Exponent

Bsp.:  $A = (4+5) * (3-1) / 2$

$A = 2^3$

1040 REM \*\*\*\*\* Berechnung der Untersumme \*\*\*\*\*

1060 A=1

1070 B=2

1080 INPUT "Anzahl Unterteilungen: ";N

1090 usumme =0

1100 FOR i=0 TO N-1

1110 usumme = usumme + (A + i \* (B – A) / 2) ^ 2

1120 NEXT i

1130 usumme = usumme \* (B – A) / N

1140 PRINT „Untersumme : „; usumme; „ bei „; N;“ Unterteilungen“

Berechnung einiger Unter- und Obersummen:

$$U_{100} = 2,31835$$

$$U_{100000} = 2,333325$$

$$O_2 = 3,125$$

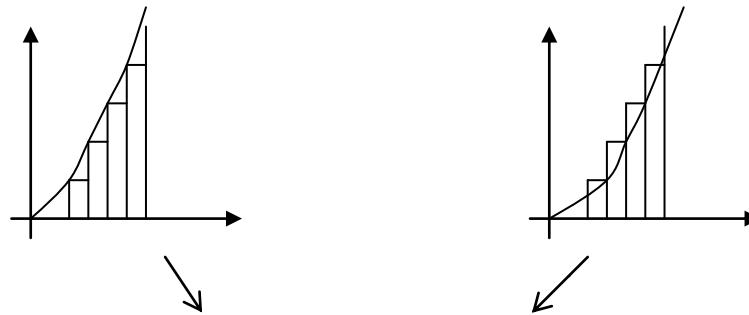
$$O_5 = 2,64$$

$$O_{100} = \frac{(2-1)}{100} \cdot \left( f\left(1 + 1 \cdot \frac{2-1}{100}\right) + f\left(1 + 2 \cdot \frac{2-1}{100}\right) + \dots + f\left(1 + 100 \cdot \frac{2-1}{100}\right) \right)$$

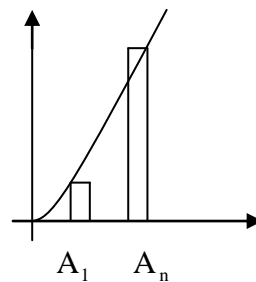
$$= 2,34835$$

$$Q_{100000} = 2,333355$$

Konvergieren Untersumme und Obersumme gegen denselben Grenzwert?



Obersumme - Untersumme



$$O_n - U_n = A_n - A_1 \rightarrow 0$$

$$\text{für } n \rightarrow \infty \text{ gilt } A_1 \rightarrow 0, A_n \rightarrow 0 \Rightarrow A_n - A_1 \rightarrow 0$$

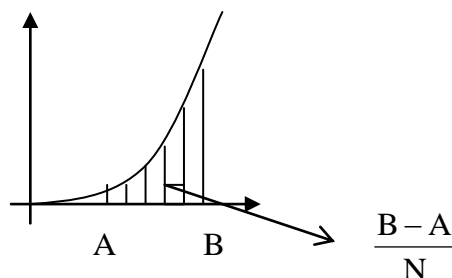
$$\text{Somit } \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \text{gesuchte Fläche}$$

Frage: Was ist der exakte Grenzwert?

### Exakte Berechnung des Grenzwertes

$$\text{Funktion: } f(x) = x^2$$

Intervall:  $[A, B]$  mit  $0 < A < B$



$N$  = Unterteilungen

Untersumme:

$$U_N = \frac{B-A}{N} \cdot \left( f(A) + f\left(A+1 \cdot \frac{B-A}{N}\right) + f\left(A+2 \cdot \frac{B-A}{N}\right) \dots + f\left(A+(N-1) \cdot \frac{B-A}{N}\right) \right)$$

$$O_N = \frac{B-A}{N} \cdot \left( f\left(A+1 \cdot \frac{B-A}{N}\right) + f\left(A+2 \cdot \frac{B-A}{N}\right) \dots + f\left(A+N \cdot \frac{B-A}{N}\right) \right)$$

für  $[A, B] = [1, 2]$  erhalten wir  $B - A = 1$

$$\begin{aligned} U_N &= \frac{1}{N} \cdot \left( f(1) + f\left(1 + \frac{1}{N}\right) + f\left(1 + \frac{2}{N}\right) \dots + f\left(1 + \frac{N-1}{N}\right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \cdot \left( 1^2 + \left(1^2 + 2 \cdot \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2}\right) + \left(1^2 + 2 \cdot \frac{2}{N} + \frac{4}{N^2}\right) \dots + \left(1 + 2 \cdot \frac{N-1}{N} + \frac{(N-1)^2}{N^2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{N} \cdot \left( N + 2 \cdot \left(\frac{1}{N} + \frac{2}{N} + \dots + \frac{N-1}{N}\right) + \frac{1}{N^2} + \frac{4}{N^2} + \dots + \frac{(N-1)^2}{N^2} \right) \\ &= \frac{1}{N} \cdot \left( N + \frac{2}{N} \cdot (1 + 2 + \dots + N-1) + \frac{1}{N^2} (1 + 4 + \dots + (N-1)^2) \right) \quad (*) \end{aligned}$$

Wir benötigen:

$$1 + 2 + 3 + \dots + N - 1 = \frac{1 + (N-1)}{2} \cdot (N-1) = \frac{N}{2} \cdot (N-1)$$

$$1 + 4 + 9 + \dots + (N-1)^2 = \frac{(N-1) \cdot N \cdot (2N-1)}{6}$$

$(*) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} U_N &= \frac{1}{N} \cdot \left( N + \frac{2}{N} \cdot \frac{N}{2} \cdot (N-1) + \frac{1}{N^2} \cdot \frac{N \cdot (N-1) \cdot (2N-1)}{6} \right) \\ &= 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{N \cdot (N-1) \cdot (2N-1)}{N^3 \cdot 6} \\ &= 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{2N^3 - N^2 + N}{6N^3} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} N \cdot (N-1) \cdot (2N-1) &= (N^2 - N) \cdot (2N-1) \\ &= 2N^3 - 2N^2 - N^2 + N = 2N^3 - N^2 + N \end{aligned}$$

$$U_N = 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{2N^3}{6N^3} - \frac{N^2}{6N^3} + \frac{N}{6N^3}$$

d.h. für jedes  $N$  können wir den Wert  $U_N$  nach obiger Formel berechnen,  
 $\{U_N\}$  ist somit eine Folge.

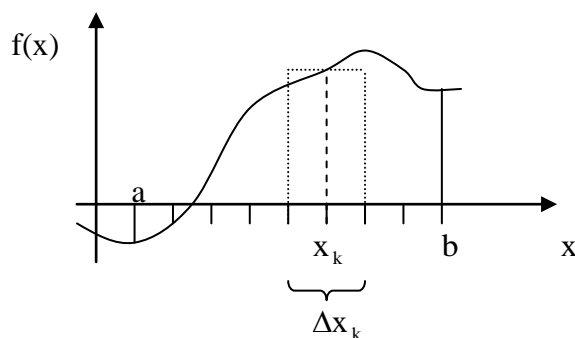
Der gesuchte Grenzwert ist der Grenzwert dieser Folge

( da Grenzwert Untersumme = Fläche = Grenzwert Obersumme ).

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} U_N &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{N-1}{N} + \frac{2N^3}{6N^3} - \frac{N^2}{6N^3} + \frac{N}{6N^3} \right) \\ &= 1 + 1 + \frac{2}{6} - 0 + 0 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2,3\end{aligned}$$

### 6.1.2 Analytische Definition des best. Integrals

Sei  $f(x)$  stetig im Intervall  $[a, b]$



$$\int_a^b f(x) dx = ? \quad (\text{Lese : Integral von a bis b f(x) dx})$$

1. Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$  in  $n$  Teilintervalle mit den Längen

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n$$

2. Pro Teilintervall  $k$  wird wie folgt verfahren :

- Wähle beliebigen Punkt  $x_k$  aus dem Intervall
- Berechne  $f(x_k)$
- Berechne Produkt  $f(x_k) \cdot \Delta x_k$

3. Summiere die Beträge aller Teilintervalle auf

$$\begin{aligned}S_n &= f(x_1) \cdot \Delta x_1 + f(x_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x_n \\ &= \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \Delta x_k\end{aligned}$$

4. Betrachte Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

Falls  $f(x)$  in  $[a, b]$  stetig ist und  $\Delta x_k \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  dann existiert der Grenzwert und ist unabhängig von der Wahl spezieller Punkte  $x_k$

### **Def.:**

Unter dem bestimmten Integral einer stetigen Funktion  $f(x)$  im Intervall  $[a, b]$  wird der Grenzwert der Summe  $S_n$  für  $n \rightarrow \infty$  verstanden, wobei  $\Delta x_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

Anm.:

1) Falls  $f(x)$  stetig ist, existiert der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$  unabhängig von der Definition der  $\Delta x_k$  und der Zwischenpunkte und ist für alle Folgen  $S_n$  gleich.

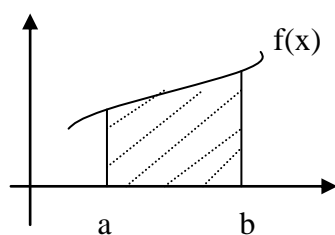
2) Anschauliche Interpretation der Symbolik:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

" $\int$ " - Zeichen = verstümmeltes  $\sum$  - Zeichen, das die "Breite"  $dx$  und der Höhe  $f(x)$  aufsummiert.

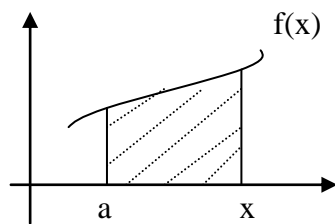
### **6.1.3 Unbestimmtes Integral**

Bestimmtes Integral:



$$\int_a^b f(x) dx \leftarrow \text{ist eine reelle Zahl}$$

Unbestimmtes Integral:



$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \leftarrow \text{Funktion von } x$$

d.h.  $a$  ist fest und  $x$  ist variabel

Unter dem unbestimmten Integral der Funktion  $f(t)$  verstehen wir die Funktionen

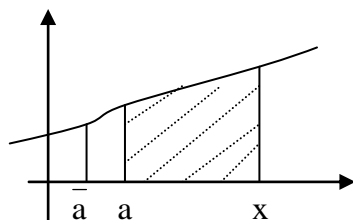
$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{wobei vorausgesetzt ist, daß für jedes feste } x \text{ das } \int_a^x f(t) dt \text{ existiert.}$$

Sei  $f(t)$  stetig gegeben. Wir betrachten  $\int_a^x f(t) dt$ . Was passiert, wenn als

Untergrenze  $\bar{a}$  statt  $a$  gewählt wird?

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F_{\bar{a}}(x) = \int_{\bar{a}}^x f(t) dt$$



$$F_{\bar{a}}(x) = \int_{\bar{a}}^x f(t) dt = \int_{\bar{a}}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt$$

↓

Konstante

$$\text{d.h. } F_{\bar{a}}(x) = \text{Konstante} + F_a(x)$$

### **Zusammenfassung:**

Die Menge dieser Funktionen, die sich nur durch eine Konstante unterscheiden, bezeichnet man als unbestimmtes Integral. (siehe nachfolgend: Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung).