

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{25} \int \frac{1}{\left(\frac{x-3}{5}\right)^2 + 1} dx = \frac{1}{25} \int \frac{1}{u^2 + 1} 5du \\
&u = \left(\frac{x-3}{5}\right) \frac{du}{dx} = \frac{1}{5} \quad \Leftrightarrow \quad dx = 5du \\
&= 5 \cdot \frac{1}{25} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{1}{5} \cdot \arctan u + c_2 \\
&= \frac{1}{5} \cdot \arctan\left(\frac{x-3}{5}\right) + c_2
\end{aligned}$$

Insgesamt :

$$\int \frac{3x-4}{x^2-6x+34} dx = \frac{3}{2} \ln|x^2-6x+34| + \arctan\left(\frac{x-3}{5}\right) + c$$

Bei mehrfach komplexen Nullstellen (Vielfachheit  $> 1$ ) ist das Verfahren für mehrfach reelle Nullstellen und das Verfahren für einfach komplexe Nullstellen zu koppeln.

Bsp.:  $\int \frac{14x^2 - 51x + 43}{x^3 - 7x^2 + 17x - 15} dx$

Nullstelle des Nenners :

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0 \quad \text{ergibt} \quad x_1 = 3 \quad x_2 = 2 - i \quad x_3 = 2 + i$$

Als Produktdarstellung des Nenners erhält man  $N(x) = (x-3) \cdot (x^2 - 4x + 5)$ . Der quadratische Term, der die konjugiert komplexen Nullstellen liefert, wird nicht zerlegt.

Partialbruchzerlegung :

$$\frac{14x^2 - 51x + 43}{x^3 - 7x^2 + 17x - 15} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2-4x+5}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$14x^2 - 51x + 43 = A(x^2 - 4x + 5) + (Bx + C) \cdot (x - 3).$$

Koeffizientenbestimmung durch Einsetzen beliebiger Werte für  $x$  :

$$x = 3: \quad 16 = 2A$$

$$x = 0: \quad 43 = 5A - 3C$$

$$x = 2: \quad -3 = A - 2B - C$$

Folglich ist  $A = 8, B = 6, C = -1$

Integration :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{14x^2 - 51x + 43}{x^3 - 7x^2 + 17x - 15} dx &= 8 \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{6x-1}{x^2-4x+5} dx = \\
 &= 8 \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{3(2x-4)+11}{x^2-4x+5} dx = \\
 &= 8 \int \frac{dx}{x-3} + 3 \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + 11 \int \frac{dx}{(x-2)^2+1} = \\
 &= \underline{\underline{8 \ln|x-3| + 3 \ln|x^2-4x+5| + 11 \arctan(x-2) + C}}
 \end{aligned}$$

### **Zusammenfassung : Integration durch Partialbruchzerlegung**

*Gegeben* sei die gebrochenrationale Fkt. :  $f(x)$

Gesucht ist :  $\int f(x) dx$

*Falls*  $f(x)$  unecht gebrochenrational, dann Zerlegung per Polynomdivision in :

$$f(x) = p(x) + \frac{Z(x)}{N(x)}$$

mit  $p(x)$  als Polynom und  $r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$  echt gebrochenrational.

$\int p(x) dx$  ist lösbar.

$\int \frac{Z(x)}{N(x)} dx$  über Partialbruchzerlegung berechnen.

Partialbruchzerlegung von  $r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$

1. Bestimmung aller reellen Nullstellen von  $N(x)$

einschließlich der Vielfachheit

Nullst. =  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$2. \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_1}{(x - x_1)} + \frac{a_2}{x - x_2} + \dots + \frac{a_n}{x - x_n}$$

Hauptnenner ergibt :  $\frac{Z(x)}{N(x)} =$

$$\frac{a_1 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_n) + a_2 (x - x_1) \cdot (x - x_3) \cdot (x_1 - x_n) \dots + a_n (x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n)}$$

$\Rightarrow$  lineares Gleichungssystem für  $a_1, a_2, \dots, a_n$

Lösung dieses Gls. ergibt gesuchte Partialbruchzerlegung.

(Alternative : Einsetzen z.B. der Nennernullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  oder bel. Werte liefert ebenfalls das obige lin. Gls.)

$$\text{Damit : } \int f(x) dx = \int p(x) dx + a_1 \int \frac{1}{x - x_1} dx + a_2 \int \frac{1}{x - x_2} dx + \dots + a_n \int \frac{1}{x - x_n} dx$$

$$\text{mit } \int \frac{1}{x - x_i} dx = \ln|x - x_i| + c \text{ ist die Lösung gefunden.}$$

Falls  $x_0$  Nullstelle mit Vielfachheit  $k > 1$  Dann Ansatz :

$$\cdot \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_k}{(x - x_0)^k} + \frac{a_{k-1}}{(x - x_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_1}{(x - x_0)^1} + \text{"weitere Nullstellen"}$$

Falls die Nullstelle des Nenners komplex und einfach (Vielfachheit 1) ist, dann :

Neuer Ansatz :

$$\int \frac{f'(x) + c}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx + \int \frac{c}{f(x)} dx$$

$$= \ln|f(x)| + c_1$$

wobei  $f(x)$  vom Grad 2 ist! (komplexe + konjugiert komplexe Lösung)

Bei komplexen Nullstellen mit Vielfachheit  $> 1$  sind die Verfahren für reelle Nullstellen mit Vielfachheit  $> 1$  und für komplexe einfache Nullstellen zu verbinden.

## 6.3 Uneigentliche Integrale

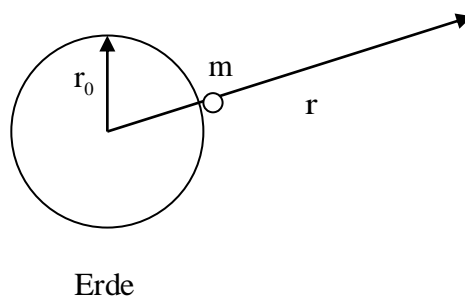
### 6.3.1 Unbeschränktes Integrationsintervall

⇒ *Integrale*, bei denen

- das Integrationsintervall unbeschränkt oder
- das Integral unbeschränkt ist

Bsp.: Eine Masse  $m$  soll von der Erdoberfläche ins "Unendliche" gebracht werden.

Welche Arbeit ist erforderlich?



$$r = \infty$$

$$F = \gamma \cdot \frac{m_k \cdot M_E}{r^2}$$

$$\gamma = 66,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

$$M_E = 5,98 \cdot 10^{24} \text{kg}$$

$$r_0 = 6300 \text{km}$$

a) *Bewegung in den Abstand  $r$*

$$\text{Arbeit : } W = \int_{r_0}^r F(r) dr = \int_{r_0}^r \frac{\gamma \cdot m_k \cdot M_E}{r^2} dr$$

$$= \gamma \cdot m_k \cdot M_E \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr = \gamma \cdot m_k \cdot M_E \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_0}^r$$

$$= \gamma \cdot m_k \cdot M_E \left( -\frac{1}{r} - \left( -\frac{1}{r_0} \right) \right) = \gamma \cdot m_k \cdot M_E \cdot \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

b)  $r = \infty$ 

$$\begin{aligned}
\int_{r_0}^{\infty} F(r) dr &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{r_0}^r F(r) dr = \lim_{r \rightarrow \infty} \gamma \cdot m_k \cdot M_E \cdot \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right) \\
&= \gamma \cdot m_k \cdot M_E \cdot \frac{1}{r_0} \\
&= 66,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot m_k \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \text{kg} \cdot \frac{1}{6300 \text{ km}} \\
&= \frac{66,7 \cdot 5,98}{6300} \cdot \frac{10^{-11} \cdot 10^{24}}{10^3} \cdot \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2 \cdot \text{m}} \cdot \text{kg} \cdot m_k \\
&= \frac{66,7 \cdot 5,98}{6300} \cdot 10^{10} \text{Nm} \cdot \frac{m_k}{\text{kg}}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung : Berechnung von  $\int_a^{\infty} f(x) dx$

1. Berechne zunächst

$$I(\lambda) = \int_a^{\lambda} f(x) dx \quad (\lambda > a)$$

2. Falls  $I(\lambda)$  für alle  $\lambda > a$  existiert, betrachten wir den Grenzwert von  $I(\lambda)$  für  $\lambda \rightarrow \infty$ 

falls dieser Grenzwert existiert, ist der Ausdruck  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  wie folgt definiert :

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^{\lambda} f(x) dx$$

Das uneigentliche Integral  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  nennt man in diesem Fall konvergent .

Falls der Grenzwert nicht existiert ist das uneigentliche Integral divergent.

In analoger Weise wird das Integral  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  definiert :

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{x \rightarrow -\infty} I(\lambda) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{\lambda}^a f(x) dx$$

Für das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  ergibt sich :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Bsp. :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$$

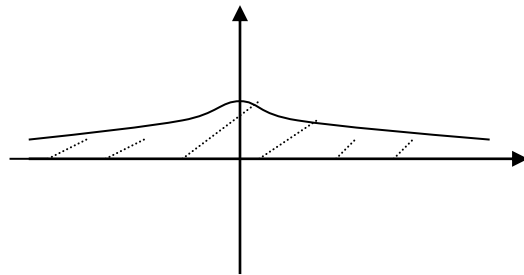
Vorüberlegungen :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{Polstelle : keine da } (1+x^2) > 0 \quad f(x) \text{ ist stetig}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x\text{-Achse ist für } x \rightarrow \pm\infty \text{ Asymptote}$$

Funktionsskizze :



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{da } f(x) \text{ symmetrisch zur } y\text{-Achse ist.}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} [\arctan x]_0^{\lambda}$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \arctan \lambda = \frac{\pi}{2}$$

Somit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

**6.3.2. Unbeschränkter Integrand**

Bsp.:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{Frage: } \int_0^1 \frac{1}{x} dx = ?$$

$f(x)$  ist im Intervall  $(0,1]$  nicht beschränkt.

Ansatz: statt  $\int_0^1$  betrachten wir  $\int_\lambda^1$  mit  $0 < \lambda < 1$  und bilden anschließend den Grenzwert.

$$\int_\lambda^1 \frac{1}{x} dx = \left[ \ln|x| \right]_\lambda^1 = \ln|1| - \ln|\lambda| = 0 - \ln \lambda$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_\lambda^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (-\ln \lambda) = ?$$

$$\text{Sei } \lambda = e^{-50} \Rightarrow -\ln(e^{-50}) = 50$$

$$\text{Allg.: } \lambda_n = e^{-n} \Rightarrow -\ln(e^{-n}) = n$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} (-\ln \lambda) = +\infty$$

$$\text{d.h. } \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{existiert nicht!}$$

$\Rightarrow$  Bei der Integration muß man auf Polstellen (Nennerfkt. = 0) achten!

Zusammenfassung falls die Fkt.  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  nichtbeschränkt ist, dann wird

das Integral  $\int_{x_0}^b f(x) dx$  wie folgt untersucht:

$$1) \text{ Berechne } I(\lambda) = \int_\lambda^b f(x) dx \quad x_0 < \lambda < b$$

$$2) \text{ Falls } I(\lambda) \text{ für alle } \lambda \text{ und } x_0 < \lambda < b \text{ existiert, betrachte Grenzwert } \lim_{\lambda \rightarrow x_0} I(\lambda)$$

Falls dieser Grenzwert existiert, dann ist  $\int_{x_0}^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow x_0} I(\lambda)$  andernfalls existiert

$$\int_{x_0}^b f(x) dx \text{ nicht.}$$

Bsp.:

$$(1) \quad \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = ?$$

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[ -\frac{1}{x} \right]_{\lambda}^1 = -\frac{1}{1} - \left( -\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} + 1$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\lambda} + 1 \right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx \text{ existiert nicht!}$$

Alternativer Lösungsweg :

$$\text{Betrachte : } f_1(\lambda) = \frac{1}{x} \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Bekannt : } \int \frac{1}{x} dx \text{ existiert nicht}$$

$$\text{Für } 0 < x < 1 \text{ gilt } x^2 < x \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Somit : } \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx > \int_0^1 \frac{1}{x} dx \rightarrow +\infty$$

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ? \quad \text{unbeschränkter Integrand}$$

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int_{\lambda}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[ 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right]_{\lambda}^1$$

$$= \left( 2 \cdot 1^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \lambda^{\frac{1}{2}} \right) = 2 - 2\sqrt{\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 2 - 2\sqrt{\lambda} = 2$$

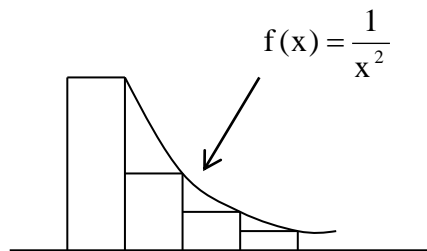
$$\text{Somit : } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$



(3) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  konvergent ?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Funktion :  $f(n) = \frac{1}{n^2}$



Betrachte Erweiterung  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  für  $x \in \mathbb{R}$  von  $f(n) = \frac{1}{n^2}$

Anschaulich erkennt man :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &< 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \left( -\frac{1}{x} \right) \right]_1^{\infty} = 1 - \left( -\frac{1}{1} \right) = 2 \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &\text{ ist konvergent.} \end{aligned}$$

(4)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx =$

$$u = x+1 \quad dx = du$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2} du = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r u^{-2} du = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ -u^{-1} \right]_{-r}^r = \lim_{r \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{r} - \frac{1}{-r} \right) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-2}{r} = 0$$

Aber  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx > 0, \text{ da } \Delta x > 0 \Rightarrow ?$

Grund : Man darf nicht über Polstellen (für  $x = -1$  wird der Nenner 0!) integrieren!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x+1)^2} dx + \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

↓

↓

↓

exist. nicht!  $\Leftarrow$

exist. nicht

exist. nicht

$$(5) \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = ?$$

$$I(\lambda) = \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^3} dx = \int_1^{\lambda} x^{-3} dx = \left[ -\frac{1}{2} x^{-2} \right]_1^{\lambda} = -\frac{1}{2} \lambda^{-2} - \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2\lambda^2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Somit : } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx = ?$$

1. Fall  $\alpha = 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ exist. nicht}$$

Sei  $\alpha \neq 1$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ ist uneigentliches Integral}$$

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\lambda}^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \int_{\lambda}^1 x^{-\alpha} dx = \left[ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{\lambda}^1 \\ &= \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{\lambda^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \end{aligned}$$

2. Fall  $\alpha > 1 \Rightarrow -\alpha + 1 < 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{\lambda^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) \\ &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$d.h. \quad \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ exist. nicht}$$

3. Fall  $\alpha < 1 \Rightarrow -\alpha + 1 > 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} I(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left( \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{\lambda^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) = \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \frac{1}{-\alpha+1}$$

Insgesamt :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1} & \text{für } \alpha < 1 \\ \text{existiert nicht} & \text{für } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

## 6.4 Numerische Integrationsmethoden

Probleme beim Einsatz analytischer Methoden

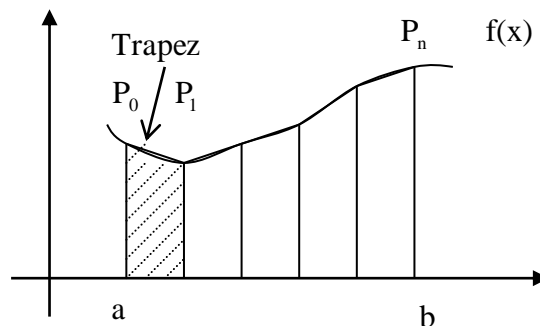
- Integration stetiger Funktionen ist nicht immer in geschlossener Form möglich

Bsp.:  $\int_0^x e^{-t^2} dt$

- Arbeitsaufwand zur Ermittlung einer analytischen Lösung ist zu hoch
- Funktion liegt als Funktionsgraph oder als Wertetabelle vor

Lösungsansatz: Einsatz numerischer Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen

### 6.4.1 Trapezformel



Gesucht ist Näherungswert für :

$$\int_a^b f(x) dx$$

Zerlegen des Intervalls  $[a, b]$  in  $n$  gleiche Teile der Breite :

$$h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow x_0 = a; x_1; x_2; \dots x_n = b$$

Kurvenbogen zwischen  $P_0$  und  $P_1$  (allg.  $P_i$  und  $P_{i+1}$ ) wird durch Sehne ersetzt  $\Rightarrow$  Trapez

Fläche des ersten Trapezes :  $A_1 = h \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}$

" zweiten " :  $A_2 = h \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

$\vdots$

" i - ten " :  $A_i = h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$

Summation der Trapezflächen ergibt Näherungswert :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\approx A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n h \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \\
 &= \frac{h}{2} \cdot \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) + f(x_i) \\
 &= \frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\
 &= \frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_n)) + \frac{h}{2} \cdot (2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1})) \\
 &= \frac{h}{2} \cdot (f(x_0) + f(x_n) + h(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}))) \\
 &= h \cdot \left( \frac{1}{2} (f(x_0) + f(x_n)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)
 \end{aligned}$$

mit  $x_0 = a$  und  $x_i = x_0 + i \cdot h = a + i \cdot h$   $x_n = b$

folgt :

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \cdot \left( \frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i \cdot h) \right)$$

Anm.:  $x_i$  heißen Stützstellen

$f(x_i)$  " Stützwerte

Der Näherungswert ist umso besser, je feiner die Intervallunterteilung ist.

Im Grenzfalle  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  liefert die Trapezformel den exakten Integralwert.

Bsp.:  $\int_0^2 e^{-x^2} dx = ?$

Intervallunterteilung  $n = 5 \Rightarrow h = \frac{2-0}{5} = 0,4$

0	0	1	
1	0,4		0,852
2	0,8		0,527
3	1,2		0,237
4	1,6		0,0773
5	2,0	0,0183	
		1,0183	1,6933

$$\int_0^2 e^{-x^2} dx \approx 0,4 \left( \frac{1}{2} \sum_1 + \sum_2 \right) = 0,8808$$