Relationen

Hüllen, Wege, Verkettungen

- Definition

  Zur Relation R heißt die Relation H die ***reflexive Hülle***, falls

  1. $R \subseteq H$,
  2. H ist reflexiv,
  3. H ist enthalten in jeder reflexiven Relation, die R enthält.

- Anmerkung:

  1. Entsprechend werden die ***symmetrische*** und die ***transitive*** Hülle einer Relation definiert.
  2. Aufgrund der dritten Bedingung ist H die *kleinste* Relation, die die ersten beiden Eigenschaften besitzt.

- Beispiel

- Definition

  Es seien A und B Mengen.

  1. Die Relation $\Delta \subseteq A \times A$ mit $\Delta = \{(a, a) \mid a \in A\}$ heißt ***Diagonalrelation*** auf A.
  2. Zu $R \subseteq A \times B$ heißt die Relation $R^{-1} \subseteq B \times A$ mit

     $$R^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B,\ a \in A \text{ und } a\ R\ b\}$$

     die ***inverse Relation zu*** R.

- Anmerkung: Die Boolesche Matrix von R^{-1} ist die Transponierte der Booleschen Matrix von R.

- Satz

  Es sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation auf A.

  Dann ist $R \cup \Delta$ die reflexive Hülle von R, und es ist $R \cup R^{-1}$ die symmetrische Hülle von R.

- Beispiel mit Booleschen Matrizen.

- Definition

  Ein ***Weg*** in einer Relation $R \subseteq A \times A$ ist eine Folge $a_0, \ldots, a_k$ mit $k \geq 0$ von Elementen aus A, so daß $(a_i, a_{i+1}) \in R$ für alle $0 \leq i < k$ gilt. Dabei heißt k die ***Länge*** des Weges.

- Anmerkung: Ein ***einfacher Weg*** ist ein Weg, bei dem kein Element mehrfach vorkommt.

- Satz

  Es sei R eine Relation auf der Menge A. Die transitive Hülle von R ist die Menge

  $$T = \{(x, y) \in A \times A \,|\, \text{es gibt in } R \text{ einen Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

- Beispiel

- Um ein erstes einfaches Verfahren zur Berechnung der transitiven Hülle zu bekommen, betrachten wir die Verkettung von Relationen.

- Verkettung von Relationen.

  Es sei A die Menge der Studenten/Studentinnen, B die Menge der Vorlesungen und C die Menge der Hörsäle. Zwischen A und B sei die Relation R_1 durch „… nimmt teil an der Vorlesung …“ gegeben. Ferner sei zwischen B und C durch „… findet statt im Hörsaal …“ die Relation R_2 definiert.

  Wie bekommt man aus R_1 und R_2 eine neue Relation zwischen A und C, die „… hat eine Vorlesung im Hörsaal …“ zum Inhalt hat?

- Definition (Verkettung von Relationen)

  Als ***Verkettung*** (***Komposition***, ***Produkt***) der Relationen $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$ bezeichnen wir die Relation $R_1 \star R_2 \subseteq A \times C$ mit

  $$R_1 \star R_2 = \{(a, c) \in A \times C \,|\, \text{es existiert ein } b \in B \text{ mit } (a, b) \in R_1 \text{ und } (b, c) \in R_2\}.$$

- Anmerkung:

  1. Sind die Mengen A und B gleich, kann man die Verkettung von R mit sich selbst bilden. Statt $R \star R$ wird kurz R^2 geschrieben. Entsprechend steht R^3 für $R^2 \star R$ u.s.w.
  2. Anstelle des Symbols $\star$ wird oft $\circ$ verwendet, wie bei der Verkettung von Funktionen; in Lehrbüchern findet man dann statt $R_1 \star R_2$ sowohl die Schreibweise $R_1 \circ R_2$ als auch $R_2 \circ R_1$.

     Das hat folgenden Grund: Eine spezielle Klasse von Relationen sind die Funktionen. Angenommen R_1 und R_2 sind Funktionen; nennen wir sie der Gewohnheit folgend f (statt R_1) und g (statt R_2). Wir haben also $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Ein Element a aus A wird durch $g(f(a))$ auf ein Element aus C abgebildet. Daher schreibt man für die Verkettung von f und g meistens $g \circ f$. Wird diese Notation vom Spezialfall der Funktionen auf den allgemeineren Fall beliebiger Relationen übertragen, muß man $R_2 \circ R_1$ schreiben.

Wir werden unten sehen, daß die Verkettung von Relationen mit einer abgewandelten Art der Matrizenmultiplikation berechnet werden kann. Links steht dabei die Boolesche Matrix von R_1 und rechts die von R_2. Hier ist $R_1 \star R_2$ die naheliegende Schreibweise.

Zur Vermeidung von Unklarheiten verwenden wir für jede der beiden Reihenfolgen ein eigenes Symbol, nämlich $\star$ wie in der obigen Definition festgelegt und $\circ$ wie bei Funktionen, so daß also

$$R_1 \star R_2 = R_2 \circ R_1$$

gilt.

- Die Verkettung zweier Relationen kann man durch boolesche Matrizenmultiplikation berechnen. Hierbei werden die Booleschen Matrizen der beiden Ausgangsrelationen genommen, und es wird eine Rechnung analog zur „normalen" Matrizenmultiplikation durchgeführt, wobei aber die Ersetzung

  logisches Oder statt Addition ($\vee$ statt $+$),

  logisches Und statt Multiplikation ($\wedge$ statt $\cdot$)

  vorgenommen wird.

- Beispiel und graphische Veranschaulichung.

- Beispiel: Graphische Bestimmung von R^2 und R^3. Hierbei gibt es jeweils zwei Möglichkeiten der Darstellung: jedes Element der zugrundeliegenden Menge taucht nur einmal als Ecke auf, oder die Elemente werden mehrfach in Spalten nebeneinander geschrieben.

- Satz

  Die Relation R^n ist die Menge aller Paare (x, y), für die es in R einen Weg der Länge n von x nach y gibt.

- Wie können wir jetzt die transitive Hülle T einer Relation R berechnen?

  Wir wissen, daß

  $$T = \{(x, y) \in A \times A \mid \text{es gibt in } R \text{ einen Weg von } x \text{ nach } y\}$$

  ist, das Paar (x, y) also genau dann zur transitiven Hülle gehört, wenn es *irgendeinen* Weg von x nach y gibt, egal welche Länge er hat.

  Alle Paare (x, y), bei denen es einen Weg der Länge n von x nach y gibt, bilden aber die Menge R^n, denn

  $$R^n = \{(x, y) \mid \text{es gibt in } R \text{ einen Weg der Länge } n \text{ von } x \text{ nach } y\}.$$

Also ist

$$T = \underbrace{R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots}_{\text{unendlich viele Mengen}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i.$$

Jetzt bleibt uns noch ein Problem: wir müssen unendlich viele Mengen vereinigen, haben also noch kein endliches Verfahren.

- Satz

  Es sei A eine endliche Menge mit n Elementen und es sei R eine Relation auf A. Ferner seien x, $y \in A$.

  Wenn es in R einen Weg von x nach y gibt, dann gibt es in R einen Weg von x nach y, der *höchstens die Länge* n hat.

- Also kann die transitive Hülle von R durch

  $$T = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$$

  berechnet werden.

  Wir haben nur noch *endlich viele* Mengen, können die Berechnung also mit Sicherheit in *endlich vielen Schritten* durchführen. Damit haben wir ein Verfahren, um die Berechnung der transitiven Hülle (bei einer Relation auf einer endlichen Menge) zu programmieren.

  Hat man einen Algorithmus zur Lösung einer Problemstellung gefunden, dann geht es um die Verbesserung der Laufzeit, eventuell auch durch eine neue Lösungsmethode. Effizienter als unser Verfahren ist der Warshall-Algorithmus. Wir verweisen auf die Literatur. (Siehe z.B.: Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications.)

- Beispiele für Anwendungen transitiver Hüllen.

  1. Erstellen von Stücklisten aus Datenbanken.
  2. Bahnverbindungen (direkt oder indirekt von a nach b).
  3. Kommunikationsnetze (Datenübertragung über Zwischenstationen).
  4. Compiler (Syntaxanalyse, Programme aus den Regeln der Grammatik ableiten).