

Graphen

Wege, Zusammenhang, Rundtouren, Bäume

- Definition

Es sei $G = (V, E)$ ein schlichter Graph.

Eine Folge von Knoten v_0, v_1, \dots, v_k heißt ein **Kantenzug** (**Weg**), wenn v_{i-1} und v_i für alle $i = 1, \dots, k$ durch eine Kante verbunden sind, wenn also $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für $i = 1, \dots, k$ gilt.

Ist $v_0 \neq v_k$ heißt der Kantenzug **offen**, ist $v_0 = v_k$ heißt er **geschlossen**. Die Anzahl k der durchlaufenen Kanten heißt die **Länge** des Kantenzugs.

- Anmerkung: Entsprechend bei anderen Arten von Graphen, z.B. gerichteten Graphen.
- Anmerkung: Die Schreibweise v_0, v_1, \dots, v_k für einen Kantenzug ist im Grunde genommen eine Abkürzung für

$$\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}.$$

- Definition

Ein Kantenzug, bei dem keine Knoten mehrfach durchlaufen werden, heißt ein **einfacher Weg**.

Ein Kantenzug v_0, v_1, \dots, v_k mit $v_0 = v_k$, bei dem keine anderen Knoten (oder Kanten) mehrfach durchlaufen werden, heißt ein **Kreis** (geschlossener einfacher Weg, Zyklus).

- Beispiele

- Definition

Zwei Knoten eines Graphen heißen **zusammenhängend**, wenn sie durch einen Kantenzug verbunden sind.

- Anmerkung: Es wird in der Definition nicht gefordert, daß die Knoten durch einen einfachen Weg verbunden sind. Man kann aber zeigen:
- Satz

Sind zwei Knoten eines Graphen zusammenhängend, dann gibt es einen einfachen Weg, der sie verbindet.

- Beweis

- Definition

Ein Graph G heißt ***zusammenhängend***, wenn zwei beliebig herausgegriffene Knoten stets zusammenhängend sind.

Ein Teilgraph heißt ***(Zusammenhangs-)Komponente*** von G , wenn

1. jeder Knoten des Teilgraphen mit allen anderen Knoten des Teilgraphen zusammenhängt, und
2. kein Knoten außerhalb des Teilgraphen existiert, der mit einem Knoten innerhalb des Teilgraphen zusammenhängt.

Die Anzahl der Komponenten eines schlichten Graphen G bezeichnen wir durch $\gamma(G)$.

- Anmerkung: Eine Komponente ist also ein maximaler zusammenhängender Teilgraph.

- Beispiele

- Anmerkung: Stellen wir uns einen Graphen mit vielen Knoten und wenig Kanten vor. Anschaulich ist klar, daß er in viele Einzelteile zerfällt, daß also die Anzahl der Komponenten groß ist.

Das Zusammenspiel zwischen der Anzahl an Knoten, Kanten und Komponenten beschreiben wir mit den folgenden Sätzen.

- Satz

Es sei G ein schlichter Graph, und G' entstehe aus G durch das Hinzufügen einer einzelnen Kante zwischen zwei nicht benachbarten Knoten von G . Dann ist

$$\gamma(G') \geq \gamma(G) - 1,$$

d.h. durch das Hinzufügen einer Kante wird die Anzahl der Komponenten um höchstens 1 reduziert.

- Satz

Für jeden schlichten Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\gamma(G) \geq |V| - |E|.$$

- Satz

Ist ein schlichter Graph $G = (V, E)$ zusammenhängend, dann gilt

$$|E| \geq |V| - 1.$$

- Anmerkung: Wenn ein zusammenhängender Graph nach dem Entfernen einer beliebigen Kante zusammenhängend bleibt, nennt man ihn **mehrfach zusammenhängend**.

Diese Eigenschaft ist in der Praxis oft sehr wichtig. Beispiele: Stromnetze, Kommunikationsnetze.

- Das Königsberger Brückenproblem.

Wir machen einen Spaziergang durch Königsberg anno 1736 und fragen uns: Kann man alle Brücken überqueren¹, jede genau einmal, und zum Ausgangspunkt zurückkehren?

- Skizze

- Problemstellung mit Multigraph und mit schlichtem Graphen.

- Definition

Ein Graph G heißt **Euler-Graph**, wenn es einen geschlossenen Kantenzug gibt, der jede Kante von G genau einmal durchläuft.

Der Kantenzug heißt dann **Euler-Kantenzug**.

- Anmerkung: Bei dem Königsberger Brückenproblem wird also gefragt, ob es einen Euler-Kantenzug gibt.

- Satz

Ist G ein eulerscher Graph, dann hat jeder Knoten von G geraden Grad.

- Beweis

- Anmerkung: Es gibt somit keine Euler-Rundtour durch Königsberg.

- Satz

Ist der Graph G zusammenhängend und jeder Knotengrad gerade, dann gibt es einen Euler-Kantenzug.

- Beweis

- Anmerkung: Bei einem Euler-Kantenzug soll jede Kante genau einmal durchlaufen werden. Wir wandeln diese Bedingung nur leicht ab und bekommen eine Problemstellung, die erstaunlicherweise wesentlich schwieriger ist. (Die Begründung dafür geht allerdings weit über unsere Vorlesung hinaus.)

Wir fragen: Gibt es einen Kantenzug im Graphen G , der *jeden Knoten* von G *genau einmal* durchläuft und dann zum Ausgangsknoten zurückkehrt? Kurz: Gibt es einen Kreis in G , der jeden Knoten von G enthält?

¹Über sieben Brücken musst du gehn.

- Definition

Ein Kreis im Graphen G , der jeden Knoten von G enthält, heißt **Hamilton-Kreis**.

- Anmerkung: Eine einfache Charakterisierung derjenigen Graphen, bei denen es einen Hamilton-Kreis gibt, ist nicht bekannt.

- Anmerkung: Ein Hamilton-Kreis enthält alle Knoten eines Graphen und ist in diesem Sinne größtmöglich. Einen anderen Extremfall haben wir, wenn ein Graph überhaupt keinen Kreis enthält.

- Definition

Ein zusammenhängender Graph, der keinen Kreis enthält, heißt ein **Baum**.

- Beispiele

- Anmerkung: Aufgrund des Zusammenhangs darf ein Baum nicht „zu wenige“ Kanten enthalten; damit keine Kreise vorkommen, dürfen es nicht „zu viele“ Kanten sein. Man kann bezüglich der Kantenzahl zeigen, daß Bäume minimal zusammenhängende Graphen und maximal kreisfreie Graphen sind. Dies liefert zwei von mehreren gleichwertigen Formulierungen, mit denen Bäume charakterisiert werden können.

- Satz (Äquivalente Beschreibungen von Bäumen)

Für einen schlichten Graphen $G = (V, E)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. G ist zusammenhängend und enthält keinen Kreis.
2. G ist zusammenhängend, aber entfernt man eine beliebige Kante, entsteht ein nichtzusammenhängender Graph.
3. G enthält keinen Kreis, aber das Hinzufügen einer neuen Kante erzeugt einen Kreis.
4. Zwei beliebig herausgegriffene Knoten von G sind durch genau einen Kantenzug verbunden.
5. G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.

Ohne Beweis.

- Definition

Wird bei einem Baum irgend ein Knoten besonders ausgezeichnet, dann nennt man den Baum einen **Wurzelbaum** und den ausgezeichneten Knoten die **Wurzel**.

- Anmerkung: Es sei v ein Knoten ungleich der Wurzel w . Dann gibt es einen eindeutigen Weg von w nach v . Der Knoten ungleich v , der v am nächsten ist und auf dem Weg liegt, heißt **Vater** von v . Die anderen Nachbarn von v heißen **Söhne** von v . Ein Knoten ohne Söhne heißt **Blatt**.