Mengenlehre

Ein kurzer Überblick über Zahlenmengen, Begriff der Primzahlen

- Wir verwenden spezielle Symbole für die wichtigsten Mengen von Zahlen.
  - ***natürliche Zahlen*** : $\mathbb{N}$
  - ***ganze Zahlen*** : $\mathbb{Z}$
  - ***rationale Zahlen*** : $\mathbb{Q}$
  - ***reelle Zahlen*** : $\mathbb{R}$
  - ***komplexe Zahlen*** : $\mathbb{C}$

  Hierbei sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Wollen wir die Null dazunehmen, schreiben wir $\mathbb{N}_0$, also $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Es gilt

  $$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

  Insbesondere gibt es Zahlen, die nicht als Brüche darstellbar sind.

- Satz

  $$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

- Anmerkung: Reelle Zahlen, die nicht rational sind, werden irrationale Zahlen genannt. Also sagt der Satz, daß $\sqrt{2}$ irrational ist.

  Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

- Hilfssatz

  Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

  $$n^2 \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad n \text{ gerade}.$$

- Sowohl Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen als auch Dezimalzahlen mit unendlich vielen periodischen Nachkommastellen lassen sich als Brüche schreiben.

  Irrationale Zahlen hingegen haben unendlich viele nicht-periodische Nachkommastellen.

- Beispiele für irrationale Zahlen.

- Beispiele für das Umrechnen von Dezimalzahlen in Brüche, speziell auch bei unendlich vielen periodischen Nachkommastellen.

- Problemstellung: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung. Skizze.

- Idee: Einführung „neuer Zahlen“; Erweiterung von $\mathbb{R}$ (ähnlich: Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$).

- Definition

  Das Symbol i sei eine „Zahl“ mit $i^2 = -1$. Wir nennen i die ***imaginäre Einheit***.

- Anmerkung: Das Rechnen mit i „wie im Reellen“ unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ führt zu sinnvollen Anwendungen. Vielfache von i sind dann z.B. $2i$, $\frac{5}{2}\,i$ und $(-\frac{7}{3})i$. Wird noch eine reelle Zahl addiert, entstehen Ausdrücke wie z.B. $6 + 2i$ oder $5 - \frac{7}{3}\,i$. Ferner ist $2i = i2$ und $6 + 2i = 2i + 6$ u.s.w.

- Definition

  Zahlen der Gestalt bi mit $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ heißen ***(rein) imaginäre Zahlen***.

  Zahlen der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen ***komplexe Zahlen***. Wir bezeichnen

  $$\mathbb{C} = \{z \,|\, z = a + bi;\; a,\, b \in \mathbb{R}\}$$

  als ***Menge der komplexen Zahlen***.

  Zu $z = a + bi$ heißt $a = \mathrm{Re}(z)$ der ***Realteil*** von z und $b = \mathrm{Im}(z)$ der ***Imaginärteil*** von z.

- Darstellung der komplexen Zahlen in der ***komplexen Ebene*** (Gaußschen Ebene).

- Anmerkung: Es gilt

  $$\begin{aligned} a + bi = c + di \quad &\Leftrightarrow \quad a = c \text{ und } b = d, \\ a + bi = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ und } b = 0, \\ a + bi \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \neq 0. \end{aligned}$$

- Rechenregeln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division).

- Definition

  Eine ***Primzahl*** ist eine ganze Zahl größer als 1, die keine positiven Teiler außer 1 und sich selbst hat. (D.h. es ist eine Zahl $p > 1$ mit exakt zwei positiven Teilern: 1 und p.)

- Auflistung aller Primzahlen bis zu einer vorgegebenen Zahl n mit dem Sieb des Eratosthenes.

- Satz

  Jede ganze Zahl größer als 1 ist ein Produkt aus Primzahlen.

- ***Primfaktorzerlegung*** einer ganzen Zahl $n > 1$ an Beispielen.

- Satz

  Es gibt unendlich viele Primzahlen. (Gleichwertig: Es gibt keine größte Primzahl.)

- Anmerkung: Manchmal wird das Symbol $\mathbb{P}$ für die Menge der Primzahlen verwendet. Die Menge $\mathbb{P}$ hat also unendliche Mächtigkeit, $|\mathbb{P}| = \infty$.

- Satz

  Die Primfaktorzerlegung ist eindeutig. D.h. zu jeder ganzen Zahl $n > 1$ gibt es eine eindeutige Zerlegung

  $$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{a_l}$$

  mit Primzahlen $p_1 < p_2 < \ldots < p_l$ und Exponenten $a_1, \ldots, a_l \in \mathbb{N}$.