

## Funktionen Grundbegriffe

- Definition (Funktion)

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen. Eine **Funktion** (oder *Abbildung*)  $f$  von  $A$  nach  $B$ ,

$$f : A \rightarrow B$$

ist eine Vorschrift, die jedem Element  $x \in A$  genau ein Element  $y \in B$  zuordnet. Schreibweise:

$$x \mapsto y \quad \text{oder} \quad y = f(x).$$

Dabei heißt  $x$  die *unabhängige* und  $y$  die *abhängige* Variable.

Die Menge  $A$  heißt **Definitionsbereich** (oder *Definitionsmenge*) von  $f$ , geschrieben  $D(f)$ . Die Menge  $\{y \mid y = f(x), x \in A\} \subseteq B$  heißt **Wertebereich** (oder *Wertemenge, Bildmenge*) von  $f$ , kurz  $W(f)$ . Die Menge  $B$  wird **Zielmenge** genannt.

- Anmerkung: Wegen der Eindeutigkeit einer Funktion kann nicht gleichzeitig  $x \mapsto y_1$  und  $x \mapsto y_2$  gelten. Hingegen ist  $f(x_1) = f(x_2)$  erlaubt. (Skizzen!)
- Beispiele:
  - Abbildung von sechsstelligen Zahlen (Matrikelnummern) auf Zeichenketten (Namen).
  - Abbildung von Programmeingabe auf Programmausgabe.
  - Abbildung von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  durch  $x \mapsto 0,5x + 1$ .

- Definition (Graph)

Der **Graph** einer Funktion  $f : A \rightarrow B$  ist die Menge der geordneten Paare  $\{(x, y) \mid x \in A \text{ und } f(x) = y\}$ .

- Beispiel: Die Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$  und  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x^2$ .
- Anmerkung: Der Graph einer Funktion  $f : A \rightarrow B$  ist eine spezielle Teilmenge des kartesischen Produktes  $A \times B$ . Charakteristisch für den Funktionsbegriff ist, daß es zu jedem  $x \in A$  genau ein Paar  $(x, y) \in A \times B$  mit  $x$  als erstem Element gibt. Dies kann man für eine alternative Definition des Funktionsbegriffs nutzen; dabei unterscheidet man nicht mehr zwischen „Abbildung“ und „Graph“.

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen. Eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  ist eine Teilmenge  $G$  von  $A \times B$  mit der Eigenschaft: zu jedem  $x \in A$  existiert genau ein  $y \in B$  derart, daß  $(x, y) \in G$  ist. Wir schreiben  $y = f(x)$ .

- Definition

Es sei  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.

1.  $f$  heißt **injektiv** (*eineindeutig, umkehrbar*), wenn aus  $x_1, x_2 \in A$  mit  $x_1 \neq x_2$  stets  $f(x_1) \neq f(x_2)$  folgt (gleichwertig: wenn aus  $f(x_1) = f(x_2)$  mit  $x_1, x_2 \in A$  stets  $x_1 = x_2$  folgt).
2.  $f$  heißt **surjektiv**, falls  $W(f) = B$ .
3.  $f$  heißt **bijektiv**, falls  $f$  injektiv und surjektiv ist.

- Beispiele mit endlichen und unendlichen Definitionsbereichen und Wertebereichen. Graphische Veranschaulichung.

- Satz

Es seien  $A$  und  $B$  *endliche* Mengen mit  $|A| = |B|$ , und es sei  $f$  eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$ . Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

1.  $f$  ist injektiv,
2.  $f$  ist surjektiv,
3.  $f$  ist bijektiv.

- Definition (Umkehrfunktion)

Die Funktion  $f : A \rightarrow B$  sei injektiv. Wir ordnen jedem  $b \in W(f)$  das eindeutig existierende Element  $a \in A$  zu, für das  $f(a) = b$  gilt, und nennen diese Funktion die **Umkehrfunktion** von  $f$ , geschrieben  $f^{-1}$ .

Also ist  $f^{-1} : W(f) \rightarrow A$ , und es ist  $f^{-1}(b) = a$ , wenn  $f(a) = b$  gilt.

- Beispiele

- Es seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : A \rightarrow B$ , also eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, wir schreiben  $y = f(x)$ . Die Umkehrfunktion kann graphisch und rechnerisch bestimmt werden.

- Graphisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten des  $x$ - $y$ -Koordinatensystems.
- Rechnerisch:  $y = f(x)$  nach  $x$  auflösen (falls möglich); dann  $x$  und  $y$  vertauschen.

- Beispiel

- Definition (Eigenschaften von Funktionen)

Es seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  und  $f : A \rightarrow B$ , also eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, wir schreiben  $y = f(x)$ .

Die Funktion  $f$  heißt

**gerade**  $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in D(f)$ ;

**ungerade**  $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in D(f)$ ;

**monoton wachsend**  $\Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$  für  $x_2 > x_1$  mit  $x_1, x_2 \in D(f)$ ;

**streng monoton wachsend**  $\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$  für  $x_2 > x_1$  mit  $x_1, x_2 \in D(f)$ ;

**monoton fallend**  $\Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$  für  $x_2 > x_1$  mit  $x_1, x_2 \in D(f)$ ;

**streng monoton fallend**  $\Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$  für  $x_2 > x_1$  mit  $x_1, x_2 \in D(f)$ ;

**(streng) monoton**  $\Leftrightarrow f$  (streng) monoton wachsend oder fallend;

**periodisch**  $\Leftrightarrow$  existiert ein  $p > 0$  mit  $f(x + p) = f(x)$  für alle  $x \in D(f)$ ;

**beschränkt**  $\Leftrightarrow$  existiert ein  $k > 0$  mit  $|f(x)| \leq k$  für alle  $x \in D(f)$ .

- Veranschaulichungen und Beispiele.
- Beispiele: Wir betrachten die Graphen
  - der Potenzfunktionen  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  und  $y = x^4$ ,
  - der Wurzelfunktionen  $y = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt[3]{x}$ ,
  - der Winkelfunktionen  $y = \sin(x)$  und  $y = \cos(x)$ .

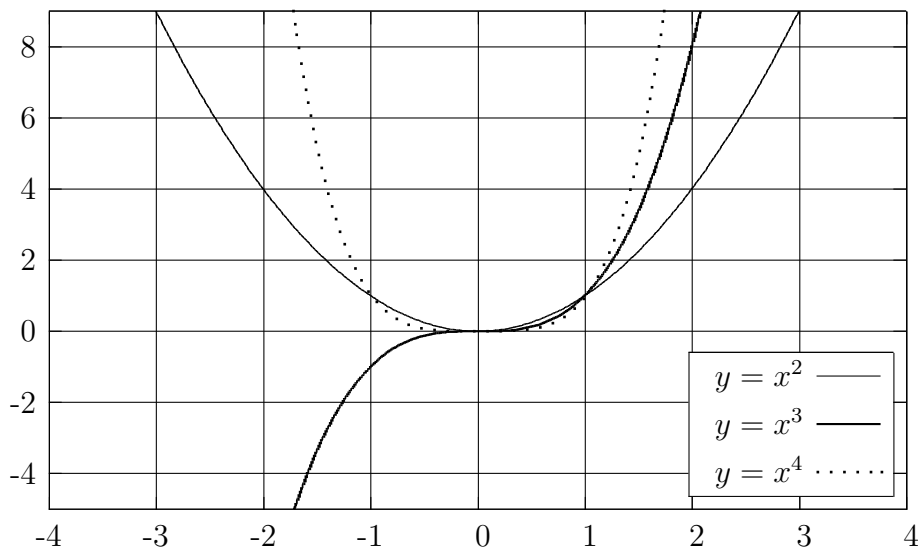


Abbildung 1: Potenzfunktionen

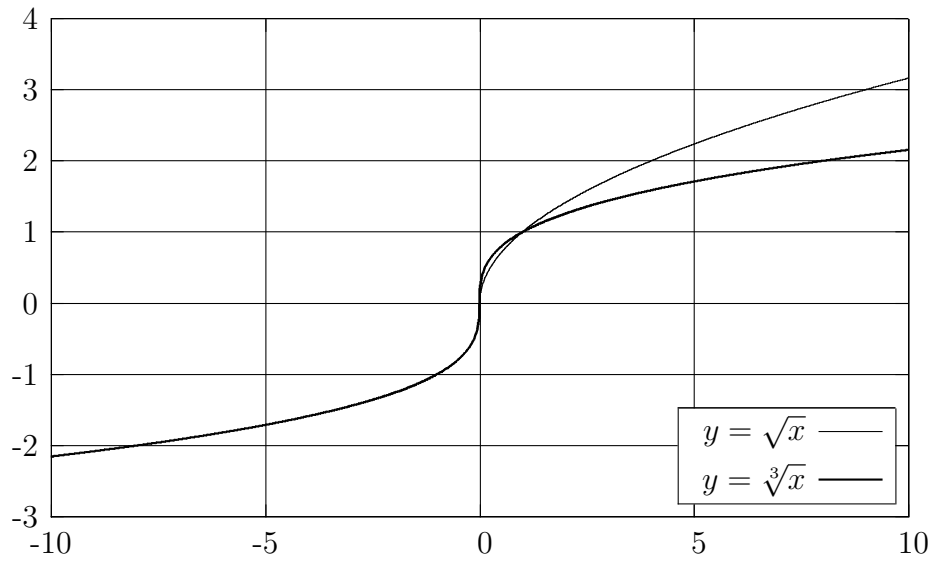


Abbildung 2: Wurzelfunktionen

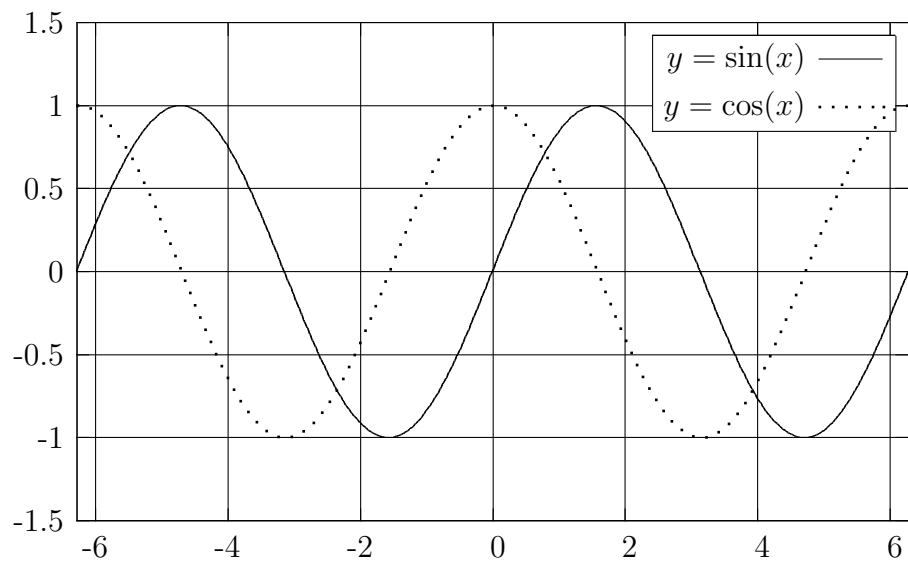


Abbildung 3: Winkelfunktionen