Graphen

Grundbegriffe, Isomorphie von Graphen

- Bei der Darstellung von Relationen haben wir gerichtete Graphen kennengelernt. Die informell eingeführten Begriffe und Bezeichnungen schreiben wir jetzt präzise in einer Definition auf.

- Definition

  Ein ***gerichteter Graph*** oder ***Digraph*** (Abkürzung für „directed graph“) $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge V von ***Knoten*** und einer Menge E von geordneten Paaren (a, b) mit a, $b \in V$, genannt ***Kanten***.

  Zur Kante (a, b) heißt a ***Anfangspunkt*** und b ***Endpunkt***. Eine Kante (a, a) heißt ***Schlinge***.

- Anmerkung: Es gibt viele alternative Bezeichnungen, auch die englischen Begriffe finden in deutschen Texten Verwendung, zumindest bei Abkürzungen.

  - Knoten, Ecke, Punkt; engl.: node, vertex (daher V), point.
  - Kante, Bogen; engl.: edge (daher E), arc.
  - Anfangspunkt; engl.: start point, initial vertex, tail.
  - Endpunkt; engl.: end point, terminal vertex, head.
  - Schlinge; engl.: loop.

- Im folgenden betrachten wir auch ungerichtete Graphen.

- Definition

  Ein ***schlichter ungerichteter Graph*** $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge V, den ***Knoten*** von G, und einer Menge E von ungeordneten Paaren $\{a, b\}$ mit a, $b \in V$ und $a \neq b$, den ***Kanten*** von G.

- Anmerkung: Bei einem schlichten Graphen (engl.: simple graph) sind zwei Knoten durch höchstens eine ungerichtete Kante verbunden; Schlingen sind verboten.

- Anmerkung:

  1. Ein „ungeordnetes Paar“ $\{a, b\}$, mit dem eine Kanten beschrieben wird, ist eine zweielementige Teilmengen von V. Also ist die Reihenfoge von a und b nicht festgelegt und die Kante hat keine Richtung.

2. Ein schlichter Graph enthält keine Schlingen, weil $a \neq b$ für jede Kante $\{a, b\}$ vorgeschrieben wird. (Eigentlich ist es überflüssig $a \neq b$ vorzuschreiben, da ja eine Menge kein Element doppelt enthält.)

   Ferner hat ein schlichter Graph keine Mehrfachkanten, da E eine Menge ist und somit ein Element $\{a, b\}$ nicht mehrfach enthalten kann.

3. Statt „schlichter ungerichteter Graph" sagt man auch kurz „Graph".

- Bezeichnungen:

  1. Der Knoten a heißt ***inzident*** (engl.: incident) mit der Kante $\{a, b\}$, die „an dem Knoten dranhängt".

     Umgekehrt heißt auch die Kante $\{a, b\}$ ***inzident*** mit dem Knoten a und ebenso mit dem Knoten b.

  2. Ist $\{a, b\} \in E$ (also a und b durch eine Kante verbunden), so heißen die Knoten a und b ***adjazent*** (engl.: adjacent) oder ***benachbart*** bzw. Nachbarn (engl.: neighbors).

- Anmerkung: Ein Graph kann durch eine ***Adjazenzmatrix*** (Nachbarschaftsmatrix) beschrieben werden.

- Beispiel

- Anmerkung: Zu den Graphen, die nicht schlicht sind, gehören

  – Multigraphen (zwei Knoten dürfen durch mehrere Kanten verbunden sein),

  – gerichtete Graphen (hier sind auch Schlingen erlaubt),

  – gewichtete Graphen (die Kanten sind mit Beschriftungen versehen, oftmals Zahlenwerte, die eine Gewichtung darstellen).

- Beispiele

- Anmerkung: Spezielle schlichte Graphen sind

  1. Kreis (cycle), C_n mit $n \geq 3$,
  2. vollständiger Graph (complete graph), K_n mit $n = 1, 2, 3, \ldots,$
  3. Rad (wheel), W_n mit $n \geq 3$.

- Anmerkung: Graphen werden vollständig durch die Knotenmenge und die Verbindungen zwischen den Knoten charakterisiert. Wird ein Graph gezeichnet, ist es egal, welcher Knoten links und welcher rechts liegt, ob die Kanten gerade oder gebogen sind u.s.w. Es müssen nur die Angaben aus Knoten- und Kantenmenge korrekt wiedergegeben werden.

  Man kann sich vorstellen, daß die Knoten verschiebbar und die Kanten Gummibänder sind, wodurch unterschiedliche „Bilder" ermöglicht werden, die aber im graphentheoretischen Sinn denselben Inhalt haben.

Gehen wir noch einen Schritt weiter. Wenn zwei Graphen mit der Gummibandmethode so übereinander gelegt werden können, daß sie komplett übereinstimmen, aber die Knoten unterschiedliche Bezeichnungen haben, dann sind die Graphen zwar nicht identisch aber auch nicht wesentlich verschieden.

Wir führen den neuen Begriff der Isomorphie ein, um die Beziehung zwischen Graphen zu bezeichnen, die sich nur in der Benennung der Knoten voneinander unterscheiden.

- Definition

  Die Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen ***isomorph*** genau dann, wenn eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$ existiert, so daß für alle a, $b \in V_1$ gilt

  $$\{a, b\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{f(a), f(b)\} \in E_2.$$

  Die Bijektion f heißt ein ***Isomorphismus*** zwischen den Graphen.

- Anmerkung: Entsprechend hat man bei einem Isomorphismus zwischen gerichteten Graphen geordnete Paare anstelle der zweielementigen Mengen, und es muß gelten

  $$(a, b) \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad (f(a), f(b)) \in E_2.$$

- Beispiel

- Definition (Knotengrad)

  Der ***Grad des Knotens*** v (degree of vertex v) ist die Anzahl der mit v inzidenten Kanten, geschrieben $d(v)$.

- Beispiel

- Satz (Handshaking-Theorem)

  Bei einem schlichten Graphen $G = (V, E)$ mit n Kanten gilt

  $$\sum_{v \in V} d(v) = 2n.$$

- Beweis

- Satz

  Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ist gerade.

- Beweis

- Anmerkung: Bei isomorphen Graphen gibt es ***Invarianten***, die bei den beiden Graphen die gleichen Werte haben müssen, zum Beispiel

  - Knotenzahl,
  - Kantenzahl,
  - Anzahl der Knoten mit Grad $d = 0$, mit Grad $d = 1$, mit Grad $d = 2$, ...