Funktionen

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$

(e) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(f) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$

(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$

(h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$

Hierbei sei $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x|\, x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$.

Aufgabe 2.
Geben Sie Beispiele für Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die

1. surjektiv aber nicht injektiv,
2. nicht surjektiv aber injektiv,
3. bijektiv aber ungleich der Identität,
4. weder surjektiv noch injektiv

sind.

Aufgabe 3.
Gegeben seien die Mengen $M = \{a, b, c, d\}$ und $\Delta_2 = \{0, 1\}$.

1. Geben Sie $M \times M$, $\Delta_2 \times \Delta_2$, $M \times \Delta_2$ und $\Delta_2 \times M$ an.
2. Gibt es injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

   (a) von M nach $\Delta_2 \times \Delta_2$,

   (b) von $\Delta_2 \times M$ nach M,

   (c) von $M \times M$ nach $M \times \Delta_2$,

   (d) von $M \times \Delta_2$ nach $M \times M$?

   Es müssen keine Abbildungen explizit angegeben werden, es geht nur um ihre Existenz.
3. Wieviele injektive, surjektive und bijektive Abbildungen gibt es von M nach Δ_2 ?

Aufgabe 4.
Gesucht ist die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3 + 5x/2$. Skizzieren Sie die beiden Graphen.

Aufgabe 5.
Von einer Folge sind die beiden Glieder $a_k = 40$ und $a_{k+2} = 90$ bekannt. Welchen Wert müssen die Folgenglieder a_{k+1} und a_{k+3} haben, wenn es sich

1. um eine arithmetische Folge (konstanter Zuwachs),
2. um eine geometrische Folge (gleicher prozentualer Zuwachs) handelt?

Aufgabe 6.
Gesucht ist die Summe aller durch 7 teilbaren positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 1000 sind.

Aufgabe 7.
Berechnen Sie mit der Formel für abbrechende geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{9} 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{9} (-2)^n.$$

Aufgabe 8.
Wird eine reelle Zahl x auf die nächste ganze Zahl kleiner oder gleich x abgerundet, so schreibt man das Ergebnis mit der sogenannten „Gauß-Klammer“ als $[x]$.

Die Gauß-Klammer ist also eine Funktion, die der reellen Zahl x die größte ganze Zahl zuordnet, die kleiner oder gleich x ist, d.h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x] := n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $n \leq x < n + 1$.

In einigen Programmiersprachen wird diese Funktion als Floor-Funktion bezeichnet. Die folgenden Schreibweisen sind gebräuchlich: $f(x) = [x] = \text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$.

Analog ordnet die Ceiling-Funktion der reellen Zahl x die kleinste ganze Zahl zu, die größer oder gleich x ist. Man schreibt $f(x) = \text{ceil}(x) = \lceil x \rceil$. Es ist dann $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lceil x \rceil := n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $n - 1 < x \leq n$.

Kurz gesagt: x wird auf eine ganze Zahl gerundet; Abrunden gibt $\lfloor x \rfloor$ und Aufrunden gibt $\lceil x \rceil$.

1. Welche Werte ergeben sich für $\lfloor 1/2 \rfloor$, $\lceil 1/2 \rceil$, $\lfloor -1/2 \rfloor$, $\lceil -1/2 \rceil$, $\lfloor 3,7 \rfloor$, $\lceil 3,7 \rceil$, $\lfloor 14 \rfloor$ und $\lceil 14 \rceil$?
2. Zeichnen Sie die Graphen von $y = \lfloor x \rfloor$ und $y = \lceil x \rceil$.
3. Skizzieren Sie $y = \lfloor -x \rfloor$ und $y = \lceil -x \rceil$. Welche Zusammenhänge kann man erkennen?
4. Welche Werte ergeben sich für $x - \lfloor x \rfloor$ und für $x - \lceil x \rceil$ (sowohl bei positivem als auch bei negativem x)?
5. Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f(x) = x - 4 \cdot [x/4]$.