Vollständige Induktion

Aufgabe 1.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)/2$ ist, also

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung: Für $n = 1$ ist die Formel gültig, wie man sofort durch Einsetzen sieht:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}\,.$$

Damit haben wir die Induktionsbasis.

Im Induktionsschritt zeigen wir, daß aus der Gültigkeit der Summenformel für $n = k$, also der Induktionsannahme, die Gültigkeit für $n = k+1$ folgt. Dazu werden in dem Ausdruck

$$1 + 2 + \ldots + k + k + 1$$

die ersten k Summanden aufgrund der Induktionsannahme zusammengefaßt. Anschließend erhält man mit einer einfachen Umformung die Summenformel für den Fall $n = k+1$.

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + k + k + 1 &= \Big(1 + 2 + \ldots + k\Big) + k + 1 \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Damit haben wir sowohl die Induktionsbasis als auch den Induktionsschritt, so daß die Gültigkeit der Summenformel für alle natürlichen Zahlen bewiesen ist.

Aufgabe 2.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$1 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

Lösung: Es sei $A(n)$ die Aussageform $1 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$.
1. Induktionsbasis

Es muß gezeigt werden, daß die Aussage A(1) wahr ist. Dies sieht man sofort durch Einsetzen von $n = 1$ in $A(n)$:

$$1 = \frac{1(1+1)^2}{4}\,.$$

2. Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Dann ist zu zeigen: Aus der Induktionsannahme $A(k)$ folgt $A(k+1)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4(k+1)]}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4k + 4)]}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}\,,
\end{aligned}$$

also gilt $A(k+1)$. (In der ersten Zeile der Umformung wurde die Induktionsannahme verwendet.)

Aus 1. und 2. folgt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach n, daß für alle reellen $q \neq 1$ und alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ die Gleichung

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

gilt.

Lösung: Die Aussageform $A(n)$ sei $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$.
1. Induktionsbasis

Die Aussage $A(0)$ ist wahr, da

$$1 = \frac{1 - q}{1 - q}$$

ist.

2. Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen $A(k)$ an und zeigen, daß $A(k+1)$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \ldots + q^k + q^{k+1} &= \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1} \\ &= \frac{1-q^{k+1} + (1-q)q^{k+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{k+1} + q^{k+1} - q^{k+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{k+2}}{1-q}\,. \end{aligned}$$

Aus 1. und 2. folgt $A(n)$ für jede ganze Zahl $n \geq 0$.

Aufgabe 4.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Summenformel

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot \nu! = (n+1)! - 1.$$

Lösung: Die Aussageform $A(n)$ sei $\sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot \nu! = (n+1)! - 1$.

1. Induktionsbasis

Es gilt $1 \cdot 1! = 1$ und andererseits

$$(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1,$$

so daß die Aussage $A(1)$ wahr ist.

2. Induktionsschritt

Es sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir nehmen $A(k)$ an und zeigen $A(k+1)$. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{k+1} \nu \cdot \nu! &= \sum_{\nu=1}^{k} \nu \cdot \nu! + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Umformung die Induktionsannahme verwendet wurde. Wegen

$$\begin{aligned} (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! &= (k+1)! + (k+1)!(k+1) - 1 \\ &= (k+1)! \cdot [1 + (k+1)] - 1 \\ &= (k+1)! \cdot (k+2) - 1 \\ &= (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} \nu \cdot \nu! = (k+2)! - 1,$$

und der Induktionsschritt ist komplett.

Insgesamt folgt aus 1. und 2., daß $A(n)$ für jede natürliche Zahl n gilt.