

## Graphen: Darstellungen, Isomorphie, Knotenfärbung

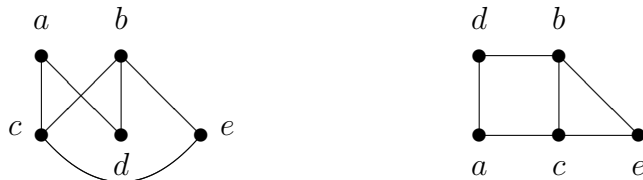
### Aufgabe 1.

Zeichnen Sie die Graphen  $G = (V, E)$  mit:

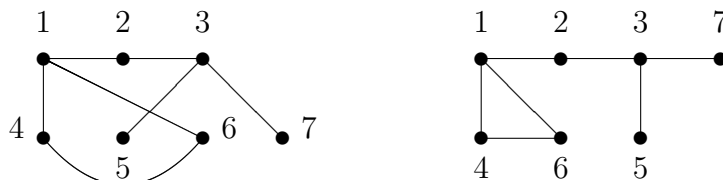
1.  $V = \{a, b, c, d, e\}$ ,  
 $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}\}$ ,
2.  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  
 $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\}$ .

### Lösung:

1. Im folgenden ist der Graph auf zwei Arten dargestellt; zunächst sind die Knoten in alphabetischer Reihenfolge gezeichnet und mit den Kanten entsprechend der Kantenmenge verbunden. Wie man sieht, gibt es Kanten, die sich überschneiden. Schöner ist eine Darstellung, in der es keine überschneidenden Kanten gibt, das ist aber keineswegs bei allen sondern nur bei planaren (plättbaren) Graphen möglich. Wie man an der zweiten Darstellung sieht, ist unser Graph plättbar und kann ohne sich überschneidende Kanten gezeichnet werden, wenn die Knoten passend angeordnet werden.

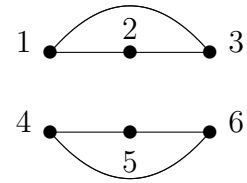
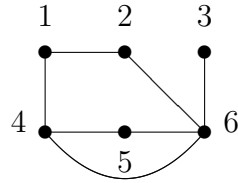
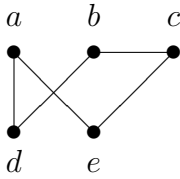


2. Hier haben wir ebenfalls einen plättbaren Graphen.



## Aufgabe 2.

Es sind die folgenden drei schlichten Graphen gegeben.



- Schreiben Sie zu jedem Graphen die aufzählende Darstellung  $G = (V, E)$  mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$  auf.
- Ein schlichter Graph  $G = (V, E)$  mit  $n$  Knoten kann durch die zugehörige Adjazenzmatrix beschrieben werden: eine  $(n \times n)$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  mit  $a_{ij} = 1$ , falls die Kante  $\{v_i, v_j\}$  zur Kantenmenge  $E$  gehört und  $a_{ij} = 0$  sonst.  
Geben Sie die Adjazenzmatrizen der Graphen an.

### Lösung:

- Aufzählende Darstellungen.

- Linker Graph:

$$V = \{a, b, c, d, e\},$$

$$E = \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}\}.$$

- Mittlerer Graph:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}.$$

- Rechter Graph:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}.$$

- Adjazenzmatrizen.

- Linker Graph:

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	0	0	0	1	1
$b$	0	0	1	1	0
$c$	0	1	0	0	1
$d$	1	1	0	0	0
$e$	1	0	1	0	0

- Mittlerer Graph:

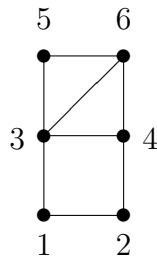
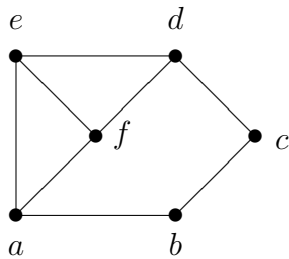
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	0	1
6	0	1	1	1	1	0

- Rechter Graph:

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	1	0

### Aufgabe 3.

Sind die beiden folgenden Graphen isomorph? Geben Sie entweder einen Isomorphismus an, oder begründen Sie, warum keiner existiert.



**Lösung:** Die Graphen sind *nicht* isomorph. Eine Begründung ist zum Beispiel, daß im rechten Graphen der Knotengrad 4 vorkommt, der im linken Graphen nicht existiert.

Genauer: Bei einem Isomorphismus gibt es *Invarianten*, d.h. Größen, die bei den isomorphen Graphen übereinstimmen. In der Vorlesung wurden drei Invarianten erwähnt: Anzahl der Knoten, Anzahl der Kanten, „Verteilung“ der Knotengrade. Stimmen zwei Graphen nicht in allen diesen Größen überein, können sie nicht isomorph sein.

#### Linker Graph

Knoten: 6

Kanten: 8

Knotengrade:	Grad	Anzahl
	2	2
	3	4
	4	0

#### Rechter Graph

Knoten: 6

Kanten: 8

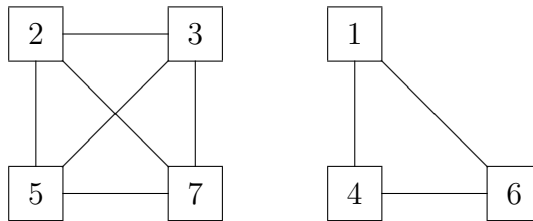
Knotengrade:	Grad	Anzahl
	2	3
	3	2
	4	1

**Aufgabe 4.**

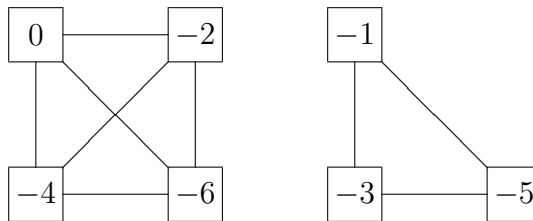
Bei dem Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  mit  $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  sollen zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie beide Primzahlen sind oder beide nicht Primzahlen sind. Bei dem Graphen  $G_2 = (V_2, E_2)$  mit  $V_2 = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6\}$  sollen zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie beide gerade oder beide ungerade sind. Gesucht ist ein Isomorphismus zwischen  $G_1$  und  $G_2$ .

**Lösung:**

- Graph  $G_1$ :



- Graph  $G_2$ :



Ein Isomorphismus zwischen  $G_1$  und  $G_2$  ist eine bijektive Abbildung  $f : V_1 \rightarrow V_2$  mit

$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten für einen Isomorphismus zwischen  $G_1$  und  $G_2$ . Die folgende Zuordnung bietet sich aufgrund der beiden gezeichneten Graphen an.

$$\begin{array}{lll} 2 \longleftrightarrow 0 & 7 \longleftrightarrow -6 & 6 \longleftrightarrow -5 \\ 3 \longleftrightarrow -2 & 1 \longleftrightarrow -1 & \\ 5 \longleftrightarrow -4 & 4 \longleftrightarrow -3 & \end{array}$$

**Aufgabe 5.**

Existiert ein schlichter Graph mit fünf Knoten und den folgenden Knotengraden? Wenn ja, wie groß ist die Anzahl der Kanten? Falls möglich, zeichnen Sie einen Graphen mit den gegebenen Eigenschaften.

- |                   |                   |                   |
|-------------------|-------------------|-------------------|
| (a) 1, 2, 3, 4, 5 | (b) 3, 3, 3, 3, 2 | (c) 1, 2, 3, 4, 4 |
| (d) 3, 4, 3, 4, 3 | (e) 0, 1, 2, 2, 3 | (f) 4, 3, 3, 2, 2 |

**Lösung:** Bei dieser Aufgabe ist der folgende Satz (siehe Vorlesung) nützlich: Die Summe aller Knotengrade ist doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|.$$

Hierbei ist  $V$  die Knotenmenge,  $E$  die Kantenmenge, und  $d(v)$  ist der Grad des Knotens  $v$ .

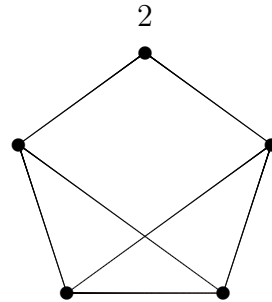
Speziell folgt aus diesem Satz: Die Summe der Knotengrade muß eine gerade Zahl sein.

- (a) 1, 2, 3, 4, 5

Einen Graphen mit diesen Knotengraden gibt es nicht, da die Summe der Knotengrade ungerade wäre, was unmöglich ist.

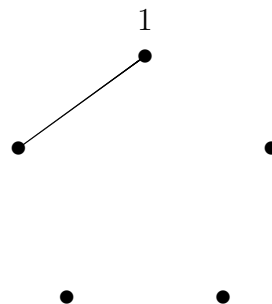
- (b) 3, 3, 3, 3, 2

Der folgende Graph ergibt sich zwangsläufig. Die Anzahl der Kanten ist  $|E| = 7$ . Der Knoten mit dem Knotengrad 2 ist gekennzeichnet.



- (c) 1, 2, 3, 4, 4

- Wir wählen einen der fünf Knoten für den Knotengrad 1 aus und zeichnen die zugehörige Kante.
- Zwei der verbleibenden vier Knoten sollen den Knotengrad 4 haben, also auch einer der drei Knoten, die in der Skizze noch keine inzidente Kante haben. Das ist *nicht möglich*, der Knotengrad 1 würde zerstört.

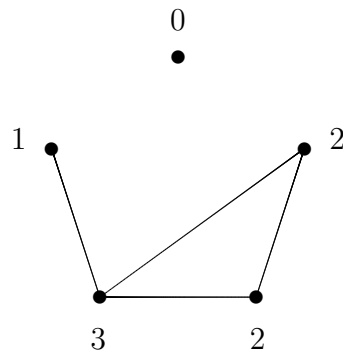


(d) 3, 4, 3, 4, 3

Einen Graphen mit diesen Knotengraden kann es nicht geben, weil die Summe der Knotengrade ungerade wäre.

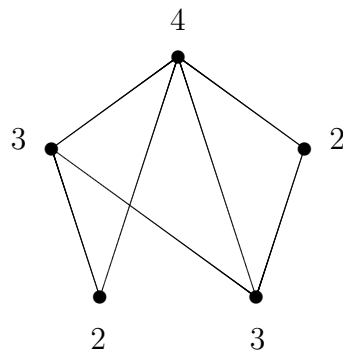
(e) 0, 1, 2, 2, 3

Der folgende Graph hat die geforderten Knotengrade. Die Anzahl der Kanten ist  $|E| = 4$ . Die Knotengrade sind an die Knoten geschrieben.



(f) 4, 3, 3, 2, 2

Der folgende Graph hat die geforderten Knotengrade. Die Anzahl der Kanten ist  $|E| = 7$ . Die Knotengrade sind an die Knoten geschrieben.



### Aufgabe 6.

Gesucht sind die chromatischen Zahlen der Graphen  $C_n$ ,  $K_n$  und  $W_n$ .

#### Lösung:

- $C_n$ : Kreis (circle) mit  $n$  Knoten.

Zeichnet man die Graphen  $C_n$  für  $n = 3, 4, 5$  und  $6$  und färbt sie mit kleinstmöglicher Farbanzahl ein, so sieht man, daß  $\chi(C_3) = 3$ ,  $\chi(C_4) = 2$ ,  $\chi(C_5) = 3$  und  $\chi(C_6) = 2$  ist.

Man beginnt mit einem beliebigen Knoten, geht im Kreise herum und kommt dabei bis zum letzten Knoten mit zwei Farben aus, die man abwechselnd verwendet. Bei dem letzten Knoten benötigt man eventuell eine dritte Farbe, denn der letzte Knoten ist sowohl zum vorletzten als auch zum Startknoten benachbart, und diese beiden können unterschiedliche Farben haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Knotenzahl ungerade ist, wie an den Beispielen unmittelbar klar wird.

Somit gilt allgemein:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (n \geq 3).$$

- $K_n$ : vollständiger Graph mit  $n$  Knoten.

Da jeder Knoten benachbart zu jedem anderen Knoten ist, muß jeder Knoten mit einer anderen Farbe gefärbt werden. Also ist

$$\chi(K_n) = n.$$

- $W_n$ : Rad (wheel) mit  $n$  Knoten außen und einem Knoten als Radnabe.

Der Knoten in der Mitte ist benachbart zu allen anderen Knoten, muß also eine eigene Farbe haben, die für keinen anderen Knoten mehr verwendet werden kann.

Bei den äußeren Knoten verhält es sich wie bei den Kreisen  $C_n$ .

Für den Graphen  $W_n$  benötigt man also eine Farbe mehr als für  $C_n$ :

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 4 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (n \geq 3).$$

### Aufgabe 7.

Angenommen, der Fachbereich MNI hat sechs Gremien, die in diesem Semester alle noch einmal tagen sollen. Wie viele verschiedene Sitzungstermine sind notwendig, damit kein Gremienmitglied zur gleichen Zeit zwei Verpflichtungen hat? Die Gremien sind:

$$G_1 = \{\text{Henrich, Kügler, Letschert}\},$$

$$G_2 = \{\text{Kaufmann, Kügler, Metz, Müller, Renz}\},$$

$$G_3 = \{\text{Henrich, Jäger, Kneisel, Letschert}\},$$

$$G_4 = \{\text{Kaufmann, Lauwerth, Letschert, Müller, Schneider}\},$$

$$G_5 = \{\text{Henrich, Kügler}\},$$

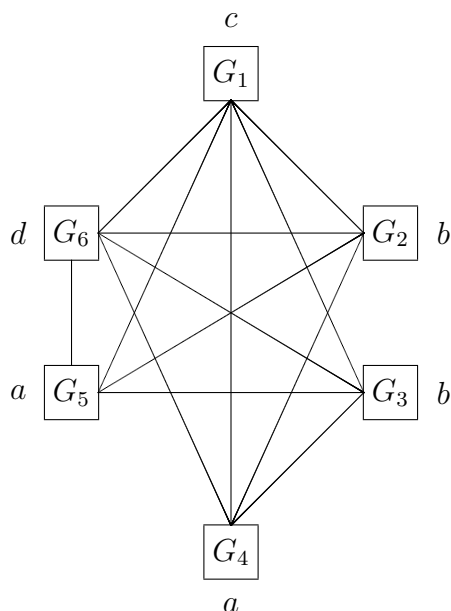
$$G_6 = \{\text{Jäger, Kaufmann, Kügler, Letschert}\}.$$

Modellieren Sie die Problemstellung mit einem Graphen, und verwenden Sie Knotenfärbung zur Lösung.

**Lösung:** Zur Modellierung der Problemstellung wird ein Graph mit 6 Knoten verwendet; jeder Knoten entspricht einem Gremium. Zwei Knoten werden genau

dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden entsprechenden Gremien mindestens ein gemeinsames Mitglied haben.

Gremien, die benachbarten Knoten entsprechen, dürfen also nicht zur gleichen Zeit tagen. Werden die verschiedenen Sitzungstermine durch unterschiedliche Farben dargestellt, dann ist die chromatische Zahl des Graphen gleich der kleinstmöglichen Anzahl an Terminen.



Als „Farben“ werden in dem Graphen die Buchstaben  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  verwendet. Die chromatische Zahl ist gleich 4.

Man kommt also mit vier Sitzungsterminen aus.

### Aufgabe 8.

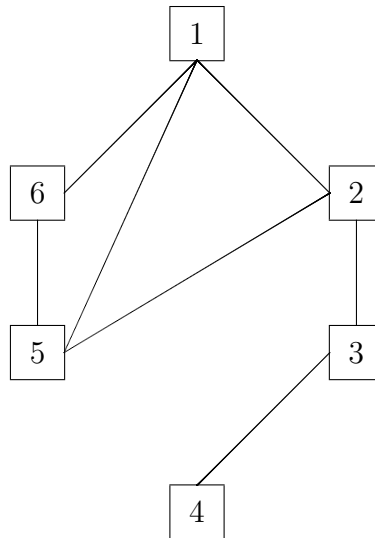
In Nord-Amerika werden bestimmte Fernsehkanäle den Fernsehstationen so zugeteilt, daß niemals zwei Stationen, die weniger als 150 Meilen voneinander entfernt sind, denselben Kanal verwenden. Wieviele verschiedene Kanäle werden dann für die sechs Stationen benötigt, deren Entfernungen voneinander in der folgenden Tabelle gegeben sind?

	1	2	3	4	5	6
1	—	85	175	200	50	100
2	85	—	125	175	100	160
3	175	125	—	100	200	250
4	200	175	100	—	210	220
5	50	100	200	210	—	100
6	100	160	250	220	100	—

**Lösung:** Wir modellieren die Situation mit einem Graphen; Knotenfärbung mit minimaler Farbanzahl liefert die Lösung.

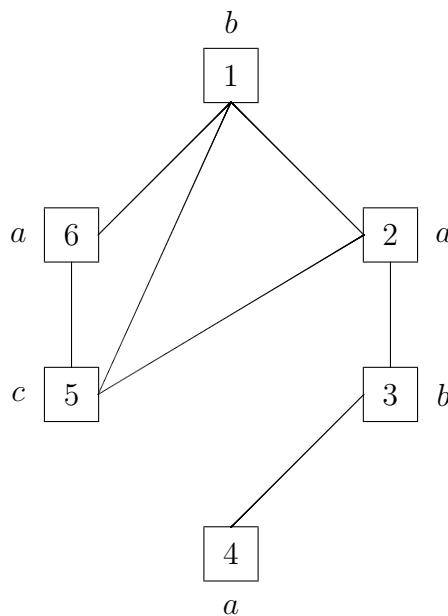


- **Knoten**<sup>1</sup> entsprechen den *Fernsehstationen*.
- **Kanten** verbinden Knoten genau dann, wenn die betreffenden Fernsehstationen *weniger als 150 Meilen voneinander entfernt* sind.



Nach der Modellierung der Ausgangssituation wird in dem Modell gearbeitet; es wird eine Knotenfärbung durchgeführt. Das Ergebnis dieser Färbung wird bezüglich der realen Problemstellung interpretiert und liefert die Lösung.

- **Farben** entsprechen den *Fernsehanälen*.
- Die **chromatische Zahl** entspricht der *Mindestanzahl benötigter Kanäle*.



Als Ersatz für Farben haben wir in der Graphik die Buchstaben  $a$ ,  $b$  und  $c$  verwendet. Die chromatische Zahl des Graphen ist gleich 3. Also sind drei Kanäle ausreichend.

<sup>1</sup>Die Bestandteile des Modells sind fett gedruckt, die Objekte und Gegebenheiten der Realität kursiv.