

Logik

Gesetze der Aussagenlogik, Normalformen

- Satz (Einige Gesetze der Aussagenlogik)

A , B und C seien Aussagenvariablen.

1. **Kommutativität** bei Konjunktion und Disjunktion.

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

2. **Assoziativität** bei Konjunktion und Disjunktion.

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

3. **Distributivität**

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

4. **doppelte Verneinung**

$$\neg(\neg A) \equiv A$$

5. **Kontraposition**

$$A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A)$$

6. **Regeln von de Morgan** bei der Negation einer Konjunktion bzw. Disjunktion.

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$$

- Beweis der Gesetze mit Wahrheitstabeln.
- Zu einer aussagenlogischen Formel kann eine Wahrheitstafel aufgestellt werden. Umgekehrt sei nun eine Wahrheitstafel gegeben und eine „passende“ aussagenlogische Formel ist gesucht.
- Anmerkung: Eine Wahrheitstafel mit 2 Aussagenvariablen hat 4 Zeilen. Eine Wahrheitstafel mit n Aussagenvariablen besteht aus 2^n Zeilen.

- Wir betrachten zwei Wege, auf denen man systematisch von der Wahrheitstafel zur aussagenlogischen Formel kommt.
 1. Wir gehen von den Zeilen aus, die den Wert *wahr* haben. Es ergibt sich eine *Oder*-Verknüpfung von Teilformeln, die nur *Und*-Verknüpfungen (von Variablen oder negierten Variablen) enthalten.
 2. Wir gehen von den Zeilen mit dem Wert *falsch* aus. Es entsteht eine *Und*-Verknüpfung von Klammern, die nur *Oder*-Verknüpfungen enthalten.

- Durchführung der beiden Methoden an einem Beispiel.

- Definition

Man bezeichnet aussagenlogische Variablen und deren Negationen durch den Oberbegriff **Literale**.

- Definition (Disjunktive Normalform)

Als **disjunktive Normalform** (kurz: DNF) einer aussagenlogischen Formel ϕ bezeichnet man eine Darstellung, in der Teilformeln durch *Oder* verknüpft werden, wobei in den Teilformeln nur *Und*-Verknüpfungen von Literalen vorkommen. D.h.

$$\phi = (\dots) \vee (\dots) \vee \dots \vee (\dots),$$

und die Klammern sind von der Bauart

$$(L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_n)$$

mit Literalen L_i .

- Definition (Konjunktive Normalform)

Eine **konjunktive Normalform** (kurz: KNF) liegt vor, wenn ϕ eine *Und*-Verknüpfung von Teilformeln ist, die nur *Oder*-Verknüpfungen von Literalen enthalten, d.h.

$$\phi = (\dots) \wedge (\dots) \wedge \dots \wedge (\dots),$$

und die Klammern sind von der Form

$$(L_1 \vee L_2 \vee \dots \vee L_n)$$

mit Literalen L_i . Diese Teilformeln aus *Oder*-verknüpften Literalen heißen auch **Klauseln**.

- Satz

Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es eine äquivalente Darstellung in KNF und eine in DNF.

- Anmerkung: Da wir jede Formel ϕ in KNF oder DNF schreiben können, folgt, daß für beliebiges ϕ die Junktoren \neg , \wedge , \vee ausreichen. Durch weiteres Umformen kann man mit einem einzigen Operator auskommen.

- Neben den fünf Junktoren \neg , \wedge , \vee , \rightarrow und \leftrightarrow sind noch weitere logische Operatoren gebräuchlich,

1. das Ausschließende Oder: \oplus (engl.: exclusive or, XOR),
2. der Sheffer-Operator: $|$ (engl.: Sheffer stroke, NAND),
3. der Peirce-Operator: \downarrow (engl.: Peirce arrow, NOR),

wobei NAND aus „not and“ gebildet wurde und NOR aus „not or“.

- Wahrheitstabeln für \oplus sowie $|$ und \downarrow .
- Satz

Zu jeder aussagenlogischen Formel ϕ gibt es eine logisch äquivalente Formel, die nur den Sheffer-Operator (NAND) enthält, sowie eine logisch äquivalente Formel, in der nur der Peirce-Operator (NOR) vorkommt.