

Logik

Prädikate, Quantoren

- Ist „ $x > 5$ “ eine Aussage?

Für $x = 7$ ist der Ausdruck wahr, für $x = 2$ ist er falsch. Also ist

$$x > 5$$

keine Aussage, denn eine Aussage ist entweder wahr oder falsch. Aber durch Einsetzen eines speziellen x -Wertes geht „ $x > 5$ “ in eine Aussage über, z.B. in die wahre Aussage $7 > 5$ oder in die falsche Aussage $2 > 5$.

- Ein umgangssprachliches Beispiel ist „___ mag Lasagne.“, das durch Einsetzen von „Garfield“ zu einer wahren Aussage wird.

Mehrere Variablen bzw. Leerstellen haben wir bei „ $x = y + 3$ “, sowie bei „ $x^2 + y^2 = z^2$ “ und bei „___ ist eine ___ und mag Lasagne.“.

- Definition (Prädikat, Grundmenge)

Ein **Prädikat** ist ein sprachliches Gebilde mit einer Leerstelle (Variablen), das durch Einsetzen eines Elementes aus einer bestimmten Menge M zu einer wahren oder falschen Aussage wird. Die Menge M heißt **Grundmenge**.

Bei n Leerstellen (Variablen) hat man ein **n -stelliges Prädikat**.

- Beispiel: Steht $P(x)$ für $x > 5$, und sollen für x Werte aus der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen eingesetzt werden, ist $P(x)$ ein Prädikat über der Grundmenge \mathbb{N} .
- Beispiel: Steht $P(x, y)$ für $x < y$ über der Grundmenge \mathbb{Z} , so hat man ein zweistelliges Prädikat über \mathbb{Z} .
- Beispiel: Für $x^2 + y^2 = z^2$ mit den drei Variablen x , y und z kann man entsprechend $P(x, y, z)$ schreiben.
- Anmerkung: Eine „Aussage mit einer Variablen“ wie $x > 5$ wird auch *Aussageform* oder *Aussagefunktion* genannt. Statt Grundmenge sagt man zu M auch *Einsetzungsbereich* oder *Individuenbereich*.
- Beispiele (aus der Umgangssprache, aus der Mathematik und aus einer Programmiersprache).

- Werden Prädikate statt Aussagen in Formeln der Aussagenlogik eingesetzt, entstehen Ausdrücke wie

$$P(x, y) \wedge Q(x, y, z) \rightarrow P(x, x)$$

oder

$$A \vee P(x, y, z) \leftrightarrow Q(x, y, z, w)$$

(Die Aussagenvariable A kann man auch als nullstelliges Prädikat auffassen.)

Mit solchen und noch allgemeiner gebauten Formeln beschäftigt sich die Prädikatenlogik. Beispielsweise können sogenannte Quantoren vorkommen.

- Quantoren

Es sei $P(x)$ ein Prädikat.

1. Die Aussage „ $P(x)$ ist wahr für alle x aus der Grundmenge.“ wird

$$\forall x P(x)$$

geschrieben. Dabei heißt \forall **Allquantor**.

2. Die Aussage „Es existiert (mindestens) ein x aus der Grundmenge, so daß $P(x)$ wahr ist.“ wird

$$\exists x P(x)$$

geschrieben. \exists heißt **Existenzquantor**.

- Bei einer endlichen Grundmenge gibt es für die Aussagen $\forall x P(x)$ und $\exists x P(x)$ äquivalente Schreibweisen ohne Quantoren.
- In einem Ausdruck der Art $\exists x \forall y P(x, y, z)$ heißen x und y **gebundene Variablen** und z **freie Variable**. Sind alle Variablen gebunden, hat man eine Aussage.
- Beispiele
- Negation von Quantoren: Es gilt

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

und

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x).$$

- Werden Quantoren geschachtelt, ist die Reihenfolge wichtig. Man vergleiche $\forall x \exists y [y > x]$ mit $\exists y \forall x [y > x]$, wobei \mathbb{N} die Grundmenge sein soll.
- Beispiele für mathematische Sätze, die mit Quantoren formuliert sind, dabei soll \mathbb{N} die Grundmenge sein.

1. $\forall q \exists p \forall x, y [p > q \wedge (x, y > 1 \rightarrow xy \neq p)]$
2. $\forall a, b, c, n [(a, b, c > 0 \wedge n > 2) \rightarrow a^n + b^n \neq c^n]$
3. $\forall q \exists p \forall x, y [p > q \wedge (x, y > 1 \rightarrow (xy \neq p \wedge xy \neq p + 2))]$