Mengenlehre

Grundlegende Begriffe und Rechenregeln

- Definition (Menge)

  Unter einer ***Menge*** M verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ***Elemente*** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

- Schreibweisen:

  $a \in M$ steht für „a ist Element der Menge M“.

  $a \notin M$ bedeutet „a ist nicht Element der Menge M“.

- Beispiele: Menge der natürlichen Zahlen, Menge der ganzen Zahlen u.s.w.

- Schreibweisen zur Charakterisierung von Mengen.

  1. Aufzählende Darstellung, z.B. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
  2. Beschreibende Darstellung: Es sei $P(x)$ ein Prädikat und M eine Menge. Dann sei
     $$\{x \in M \mid P(x)\}$$
     die Menge aller Elemente von M, die für x in $P(x)$ eingesetzt, $P(x)$ zu einer wahren Aussage machen.
     $$a \in \{x \in M \mid P(x)\} \quad \Leftrightarrow \quad (\ a \in M \text{ und } P(a) \text{ ist wahr.})$$

- Definition

  Es seien A und B Mengen.

  1. A heißt ***Teilmenge*** von B, wenn aus $x \in A$ stets $x \in B$ folgt.
     Schreibweise: $A \subseteq B$.
  2. Wir schreiben $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt. Sonst: $A \neq B$.
  3. A heißt genau dann eine echte Teilmenge von B, wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ist.
     Schreibweise: $A \subset B$.
  4. Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt die ***leere Menge***.
     Schreibweise: $\emptyset$.
     Festsetzung: $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge.

5. ***Durchschnitt*** von A und B:

$$A \cap B = \{x | (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

6. ***Vereinigung*** von A mit B:

$$A \cup B = \{x | (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

7. ***Differenzmenge*** A ohne B:

$$A \setminus B = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

8. Es sei B eine Teilmenge von A, also $B \subseteq A$. Das ***Komplement*** von B in A ist:

$$\complement_A(B) = \overline{B}_A = \{x | (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \setminus B.$$

9. Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B *disjunkt* oder *elementfremd*.
10. Die Menge aller Teilmengen von A heißt die ***Potenzmenge*** $\mathcal{P}(A)$ von A.

- Satz (Rechenregeln für die Verknüpfung von Mengen)

  Es seien A, B und C Mengen.

  1. ***Kommutativität*** bei Durchschnitt und Vereinigung

  $$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \\ A \cup B &= B \cup A \end{aligned}$$

  2. ***Assoziativität*** bei Durchschnitt und Vereinigung

  $$\begin{aligned} (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

  3. ***Distributivität***

  $$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

  4. ***Regeln von de Morgan*** bei dem Komplement eines Durchschnitts bzw. einer Vereinigung

  $$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

  Das Komplement soll dabei bezüglich einer gemeinsamen Obermenge von A und B gebildet werden.

- Beweis der Regeln durch Rückführung auf entsprechende Gesetze der Aussagenlogik.

- Anmerkung: Die Schreibweise bei der Vereinigung von n Mengen A_1, A_2, ..., A_n ist

  $$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

  bzw. beim Durchschnitt

  $$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

  Diese Darstellungen sind wegen der Assoziativität von Vereinigung und Durchschnitt zulässig.

- Definition

  Eine Menge heißt *endlich*, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält.

  Ist die Menge A endlich, so bezeichne $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. Man nennt $|A|$ die ***Mächtigkeit*** (oder die *Kardinalität*) der Menge A.

  Ist M nicht endlich, schreibt man $|A| = \infty$.

- Anmerkung: Es sei $A \subseteq B$. Ist B endlich, so ist A endlich. Ist A unendlich, so ist B unendlich.

- Beispiel:

  $P =$ Menge der Primzahlen, $Z =$ Menge der Primzahlzwillinge. Es ist $Z \subset P$ und $|P| = \infty$. Aber $|Z| = ?$

- Satz

  Es seien A und B endliche Mengen. Es gilt

  $$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- Definition

  Es seien A und B Mengen. Wir setzen

  $$A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A,\ b \in B\}.$$

  Dabei sei

  $$(a, b) = (a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \text{ und } b = b'.$$

  Die Symbole (a, b) heißen die *geordneten Paare* von Elementen aus A und B.

  $A \times B$ heißt das ***kartesische Produkt*** von A mit B.

  Ist $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$, so sei $A \times B = \emptyset$.

  Wir schreiben $A \times A = A^2$ und entsprechend $A^1 = A$.

- Beispiel
- Veranschaulichung in der Zeichenebene.
- Definition

  Das kartesische Produkt von n Mengen $A_1, \ldots, A_n$ sei

  $$A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) |\, a_i \in A_i\}.$$

  Dabei sei

  $$(a_1, \ldots, a_n) = (a'_1, \ldots, a'_n) \quad \Leftrightarrow \quad a_i = a'_i \text{ für alle } i.$$

  Die $(a_1, \ldots, a_n)$ heißen **n-*Tupel***.

  Schreibweise bei n übereinstimmenden Mengen: $A^n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n\text{-mal}}$.

- Anmerkung: Der von uns verwendete (sogenannte „naive“ Mengenbegriff) kann zu Schwierigkeiten führen. Augenfällig macht dies die ***Russellsche Antinomie*** (Russellsches Paradoxon).

  Wir bilden eine Menge R aus allen Mengen M, die sich nicht selbst enthalten, für die also $M \notin M$ gilt. Es sei somit

  $$R = \{M |\, M \notin M\}.$$

  Jetzt kann man fragen, ob auch $R \notin R$ gilt, oder ob $R \in R$ ist. Aber *beide* Annahmen führen auf einen Widerspruch! (Wir erhalten $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.)

  Um den Widerspruch zu vermeiden, muß man den Mengenbegriff abändern; es wird nicht mehr erlaubt, beliebige Mengen entsprechend unserer „naiven“ Definition zu bilden.