

Logik: aussagenlogische Formeln und Wahrheitstafeln

Aufgabe 1.

Schreiben Sie für die folgenden zusammengesetzten Aussagen (aussagenlogischen Formeln) ϕ_1 bis ϕ_4 die Wahrheitstafeln auf. Welche der Formeln sind erfüllbar? Gibt es Tautologien oder Kontradiktionen?

$$\begin{aligned}\phi_1 &= (A \vee (\neg B)) \wedge A \\ \phi_2 &= A \vee (\neg(A \wedge B)) \\ \phi_3 &= (A \vee (\neg B)) \wedge (\neg A) \\ \phi_4 &= (A \wedge B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))\end{aligned}$$

Lösung:

$$\phi_1 = (A \vee (\neg B)) \wedge A$$

A	B	$\neg B$	$A \vee (\neg B)$	ϕ_1
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	f	f
f	f	w	w	f

Die Formel ϕ_1 ist erfüllbar. Da sich in zwei Zeilen der Wahrheitstafel der Wahrheitswert w ergibt, ist die Formel sogar für zwei unterschiedliche Belegungen der atomaren Variablen erfüllbar. Da ϕ_1 sowohl wahr als auch falsch sein kann, ist die Formel weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion.

$$\phi_2 = A \vee (\neg(A \wedge B))$$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	ϕ_2
w	w	w	f	w
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	w	w

Die Formel ϕ_2 ist stets wahr und damit nicht nur erfüllbar, sondern sogar eine Tautologie.

$$\phi_3 = (A \vee (\neg B)) \wedge (\neg A)$$

A	B	$\neg B$	$A \vee (\neg B)$	$\neg A$	ϕ_3
w	w	f	w	f	f
w	f	w	w	f	f
f	w	f	f	w	f
f	f	w	w	w	w

Die Formel ϕ_3 ist erfüllbar und somit keine Kontradiktion. Da sie aber auch den Wahrheitswert f annehmen kann, ist sie auch keine Tautologie.

$$\phi_4 = (A \wedge B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$A \wedge B$	ϕ_4
w	w	f	f	f	w	f
w	f	f	w	w	f	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	f	f

Die Formel ϕ_4 ist nicht erfüllbar, d.h. es ist eine Kontradiktion. Für keine Belegung der atomaren Aussagen mit Wahrheitswerten bekommt die Formel den Wahrheitswert w.

Aufgabe 2.

Beweisen Sie mit Wahrheitstabellen die folgenden logischen Äquivalenzen.

1. $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
2. $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$
3. $(A \vee B) \equiv (\neg(\neg A \wedge \neg B))$

Also kann man jede zusammengesetzte Aussage nur mit den beiden Junktoren \neg und \wedge formulieren. Denn falls die Junktoren \vee , \rightarrow oder \leftrightarrow vorkommen, ersetzt man zunächst \leftrightarrow , dann \rightarrow und schließlich \vee entsprechend den obigen logischen Äquivalenzen.

Ist es möglich, jede zusammengesetzte Aussage nur unter Verwendung der beiden Junktoren \neg und \vee zu formulieren?

Lösung:

1.

A	B	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

2.

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \rightarrow B$
w	w	f	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

3.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	$A \vee B$
w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	f	f

Mit Regeln der Aussagenlogik (siehe Skript zur Vorlesung) folgt

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A) \vee \neg(\neg B) \Leftrightarrow A \vee B,$$

man kann also die logische Äquivalenz aus dem dritten Teil der Aufgabe auch auf diesem Weg herleiten.

Die logischen Äquivalenzen zeigen, daß jede Aussage nur unter Verwendung der Junktoren \neg und \wedge geschrieben werden kann. In der Zusatzfrage geht es nun darum, ob es entsprechend möglich ist, jede zusammengesetzte Aussage ausschließlich mit den beiden Junktoren \neg und \vee zu formulieren. Um dies zu zeigen, genügt es, den Junktor \wedge mit \neg und \vee auszudrücken. Wie kommt man auf eine solche Formulierung? Wir können z.B. mit den Regeln der Aussagenlogik arbeiten und eine Umformung ähnlich wie oben aufschreiben (nur jetzt „von rechts nach links“):

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B).$$

Es ist sogar möglich, mit nur einem einzigen Junktor auszukommen (siehe Literatur).

Aufgabe 3.

Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen, daß es sich bei den folgenden aussagenlogischen Formeln um Tautologien handelt.

1. $A \vee (\neg A)$
Satz vom ausgeschlossenen Dritten.
2. $\neg(A \wedge (\neg A))$
Satz vom Widerspruch.
3. $(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A$
Satz von der doppelten Verneinung.
4. $(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
 $(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
Sätze von De Morgan.

5. $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
Abtrennungsregel.
6. $((A \rightarrow B) \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$
Widerlegungsregel.
7. $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$
Kettenschlußregel.

Lösung:

1.

A	$\neg A$	$A \vee (\neg A)$
w	f	w
f	w	w

2.

A	$\neg A$	$A \wedge (\neg A)$	$\neg(A \wedge (\neg A))$
w	f	f	w
f	w	f	w

3.

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

4.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

Das Muster der Wahrheitswerte in den letzten beiden Spalten stimmt überein, d.h die betreffenden Aussagen sind logisch äquivalent. Mit einer entsprechenden Tabelle folgt, daß der Ausdruck $(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$ ebenfalls eine Tautologie ist.

5.

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge A$	$((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	w
f	w	w	f	w
f	f	w	f	w

6.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \rightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (\neg B)$	ϕ
w	w	f	f	w	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	w	w	w

Hierbei steht ϕ für $((A \rightarrow B) \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$.

7.

A	B	C	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow C$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$	$A \rightarrow C$	ϕ
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Hierbei steht ϕ für $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C)$.

Aufgabe 4.

In einem technischen Dokument stehen die folgenden¹ Aussagen.

1. If the file system is not locked, then
 - (a) new messages will be queued;
 - (b) new messages will be sent to the message buffer;
 - (c) the system is functioning normally, and conversely.
2. If new messages are not queued, then they will be sent to the message buffer.
3. New messages will not be sent to the message buffer.

Sind diese Spezifikationen konsistent, oder gibt es einen inneren Widerspruch?

1. Übersetzen Sie zunächst die einzelnen Teile der Spezifikation in Formeln der Aussagenlogik. Verwenden Sie die folgenden vier Aussagen:
 L für „file system locked“;
 Q für „new messages are queued“;
 B für „new messages are sent to the message buffer“;
 N für „system functioning normally“.
2. Die Spezifikation ist konsistent, wenn es eine Zuweisung von Wahrheitswerten zu den Aussagen gibt, so daß jeder der logischen Ausdrücke wahr ist. Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle um festzustellen, ob die Spezifikation konsistent ist.

¹Rosen: Discrete Mathematics and Its Applications (Fifth Edition), Seite 19, Aufgabe 1.1.48.

3. Kann man auch ohne eine Wahrheitstabelle herausfinden, ob die Spezifikation konsistent ist? Nehmen Sie dazu die aufgestellten Formeln, und versuchen Sie, mit einer geschickten Argumentation ohne Tabelle zum Ergebnis zu kommen.

Lösung:

1. Die fünf zusammengesetzten Aussagen unter 1.(a), 1.(b), 1.(c), 2. und 3. werden mit den vier atomaren Aussagen L , Q , B und N formuliert.

- 1.(a) wird zu: $\neg L \rightarrow Q$
- 1.(b) wird zu: $\neg L \rightarrow B$
- 1.(c) wird zu: $\neg L \leftrightarrow N$
- 2. wird zu: $\neg Q \rightarrow B$
- 3. wird zu: $\neg B$

2. Wir haben vier atomare Aussagen. Eine Wahrheitstafel muß also 16 Zeilen haben, damit alle möglichen Belegungen der atomaren Aussagen mit Wahrheitswerten enthalten sind. Für jede der 16 Zeilen müssen wir die Wahrheitswerte der obigen 5 Aussagen bestimmen. Wenn es mindestens eine Zeile gibt, in der die 5 Aussagen alle wahr sind, dann sind die Spezifikationen konsistent. Ist aber in jeder Zeile der Wahrheitstafel mindestens eine der obigen Aussagen falsch, dann enthalten die Spezifikationen einen inneren Widerspruch, da sie nicht alle gleichzeitig erfüllbar sind, d.h. die Spezifikationen sind inkonsistent. Stellt man die Wahrheitstafel auf, so zeigt sich, daß bei genau einer Belegung von L , Q , B und N mit Wahrheitswerten alle Spezifikationen erfüllt werden können, d.h. die Spezifikationen sind konsistent.

(Das Aufstellen einer Wahrheitstabelle dieser Größe ist mühsam. Kann man das nicht per Programm machen? Ja! Das ist eine interessante Programmieraufgabe als Ergänzung.)

3. Fallunterscheidung

Fall 1: B ist wahr.

Dann ist die letzte Formel ($\neg B$) falsch. Eine konsistente Spezifikation ist damit nicht möglich, so daß wir Fall 1 nicht weiter zu untersuchen brauchen.

Fall 2: B ist falsch.

Die Aussagen 1.(b) und 2. können nur dann wahr sein, wenn $\neg L$ und $\neg Q$ falsch, d.h. L und Q wahr sind.

Wenn L wahr ist, d.h. $\neg L$ falsch, dann kann Aussage 1.(c) nur wahr sein, wenn N falsch ist. Die Spezifikationen können also nur konsistent sein, wenn L wahr, Q wahr, B falsch und N falsch ist.

Wir sind noch nicht fertig!

Wir wissen: die Aussagen 1.(b), 1.(c), 2. und 3. sind wahr. Aber 1.(a) muß noch überprüft werden! Bei der hergeleiteten Belegung von L , Q , B und N ist aber auch 1.(a) wahr.

Also ist das System konsistent, und darüberhinaus ist die Belegung der atomaren Aussagen eindeutig.