

## Funktionen

### Aufgabe 1.

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$

(b)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x^3$

(c)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(d)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, f(x) = x^2$

(e)  $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

(f)  $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}, f(x) = x^2$

(g)  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, f(x) = x^2$

(h)  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, f(x) = x^2$

Hierbei sei  $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$ .

### Aufgabe 2.

Geben Sie Beispiele für Abbildungen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{N}$  an, die

1. surjektiv aber nicht injektiv,
2. nicht surjektiv aber injektiv,
3. bijektiv aber ungleich der Identität,
4. weder surjektiv noch injektiv

sind.

### Aufgabe 3.

Gegeben seien die Mengen  $M = \{a, b, c, d\}$  und  $\Delta_2 = \{0, 1\}$ .

1. Geben Sie  $M \times M$ ,  $\Delta_2 \times \Delta_2$ ,  $M \times \Delta_2$  und  $\Delta_2 \times M$  an.
2. Gibt es injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

(a) von  $M$  nach  $\Delta_2 \times \Delta_2$ ,

(b) von  $\Delta_2 \times M$  nach  $M$ ,

(c) von  $M \times M$  nach  $M \times \Delta_2$ ,

(d) von  $M \times \Delta_2$  nach  $M \times M$  ?

Es müssen keine Abbildungen explizit angegeben werden, es geht nur um ihre Existenz.

3. Wieviele injektive, surjektive und bijektive Abbildungen gibt es von  $M$  nach  $\Delta_2$  ?

**Aufgabe 4.**

Gesucht ist die Umkehrfunktion zu  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -3 + 5x/2$ . Skizzieren Sie die beiden Graphen.

**Aufgabe 5.**

Von einer Folge sind die beiden Glieder  $a_k = 40$  und  $a_{k+2} = 90$  bekannt. Welchen Wert müssen die Folgenglieder  $a_{k+1}$  und  $a_{k+3}$  haben, wenn es sich

1. um eine arithmetische Folge (konstanter Zuwachs),
2. um eine geometrische Folge (gleicher prozentualer Zuwachs) handelt?

**Aufgabe 6.**

Gesucht ist die Summe aller durch 7 teilbaren positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 1000 sind.

**Aufgabe 7.**

Berechnen Sie mit der Formel für abbrechende geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^9 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^9 (-2)^n.$$

**Aufgabe 8.**

Wird eine reelle Zahl  $x$  auf die nächste ganze Zahl kleiner oder gleich  $x$  abgerundet, so schreibt man das Ergebnis mit der sogenannten „Gauß-Klammer“ als  $\lfloor x \rfloor$ .

Die Gauß-Klammer ist also eine Funktion, die der reellen Zahl  $x$  die größte ganze Zahl zuordnet, die kleiner oder gleich  $x$  ist, d.h.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = \lfloor x \rfloor := n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  und  $n \leq x < n + 1$ .

In einigen Programmiersprachen wird diese Funktion als Floor-Funktion bezeichnet. Die folgenden Schreibweisen sind gebräuchlich:  $f(x) = \lfloor x \rfloor = \text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$ .

Analog ordnet die Ceiling-Funktion der reellen Zahl  $x$  die kleinste ganze Zahl zu, die größer oder gleich  $x$  ist. Man schreibt  $f(x) = \text{ceil}(x) = \lceil x \rceil$ . Es ist dann  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = \lceil x \rceil := n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  und  $n - 1 < x \leq n$ .

Kurz gesagt:  $x$  wird auf eine ganze Zahl gerundet; Abrunden gibt  $\lfloor x \rfloor$  und Auf-runden gibt  $\lceil x \rceil$ .

1. Welche Werte ergeben sich für  $\lfloor 1/2 \rfloor$ ,  $\lceil 1/2 \rceil$ ,  $\lfloor -1/2 \rfloor$ ,  $\lceil -1/2 \rceil$ ,  $\lfloor 3,7 \rfloor$ ,  $\lceil 3,7 \rceil$ ,  $\lfloor 14 \rfloor$  und  $\lceil 14 \rceil$  ?
2. Zeichnen Sie die Graphen von  $y = \lfloor x \rfloor$  und  $y = \lceil x \rceil$ .
3. Skizzieren Sie  $y = \lfloor -x \rfloor$  und  $y = \lceil -x \rceil$ . Welche Zusammenhänge kann man erkennen?
4. Welche Werte ergeben sich für  $x - \lfloor x \rfloor$  und für  $x - \lceil x \rceil$  (sowohl bei positivem als auch bei negativem  $x$ )?
5. Skizzieren Sie den Graph der Funktion  $f(x) = x - 4 \cdot \lfloor x/4 \rfloor$ .