Funktionen

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$

(e) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(f) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, $f(x) = x^2$

(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$

(h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$

Hierbei sei $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x | \, x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$.

Lösung: Die komplette Aufgabe kann anschaulich mit Hilfe der Funktionsgraphen gelöst werden.

	injektiv	surjektiv	bijektiv
(a)	ja	ja	ja
(b)	ja	nein	nein
(c)	nein	nein	nein
(d)	nein	ja	nein
(e)	ja	nein	nein
(f)	ja	ja	ja
(g)	nein	nein	nein
(h)	ja	nein	nein

Aufgabe 2.
Geben Sie Beispiele für Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die

1. surjektiv aber nicht injektiv,
2. nicht surjektiv aber injektiv,
3. bijektiv aber ungleich der Identität,
4. weder surjektiv noch injektiv

sind.

Lösung: Es gibt beliebig viele Beispiele, die folgenden wurden aufgrund ihrer Einfachheit ausgewählt. Veranschaulichen kann man die Funktionen z.B. in einem kartesischen Koordinatensystem, der Graph besteht dann aus Punkten der Ebene. In einer andere Darstellung werden Elemente des Definitions- und des Bildbereichs aufgeschrieben, und die Abbildung wird durch Pfeile symbolisiert. Beide Veranschaulichungen zeigen natürlich nur endliche Ausschnitte der Funktionen. Vollständig gegeben sind die Funktionen durch die folgenden Definitionen.

1. $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ n-1 & \text{sonst} \end{cases}$
2. $f(n) = n + 1$
3. $f(n) = \begin{cases} 2 & \text{für} & n = 1 \\ 1 & \text{für} & n = 2 \\ n & \text{sonst} & \end{cases}$
4. $f(n) = 1$

Aufgabe 3.
Gegeben seien die Mengen $M = \{a, b, c, d\}$ und $\Delta_2 = \{0, 1\}$.

1. Geben Sie $M \times M$, $\Delta_2 \times \Delta_2$, $M \times \Delta_2$ und $\Delta_2 \times M$ an.
2. Gibt es injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen
   (a) von M nach $\Delta_2 \times \Delta_2$,
   (b) von $\Delta_2 \times M$ nach M,
   (c) von $M \times M$ nach $M \times \Delta_2$,
   (d) von $M \times \Delta_2$ nach $M \times M$?

   Es müssen keine Abbildungen explizit angegeben werden, es geht nur um ihre Existenz.
3. Wieviele injektive, surjektive und bijektive Abbildungen gibt es von M nach Δ_2 ?

Lösung:

1. Die Anzahl der Elemente in den Produktmengen ergibt sich als $|M \times M| = |M| \cdot |M| = 4 \cdot 4 = 16$, als $|M \times \Delta_2| = |M| \cdot |\Delta_2| = 4 \cdot 2 = 8$ u.s.w.

$$\begin{aligned} M \times M &= \{ (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), \\ &\quad (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), \\ &\quad (c,a), (c,b), (c,c), (c,d), \\ &\quad (d,a), (d,b), (d,c), (d,d) \} \end{aligned}$$

$$\Delta_2 \times \Delta_2 = \{ (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) \}$$

$$
\begin{aligned}
M \times \Delta_2 &= \{ (a,0),(a,1),(b,0),(b,1),\\
&\qquad (c,0),(c,1),(d,0),(d,1) \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 \times M &= \{ (0,a),(0,b),(0,c),(0,d),\\
&\qquad (1,a),(1,b),(1,c),(1,d) \}
\end{aligned}
$$

2. Existieren Abbildungen, die injektiv, surjektiv oder bijektiv sind?

	injektiv	surjektiv	bijektiv
von M in $\Delta_2 \times \Delta_2$	ja	ja	ja
von $\Delta_2 \times M$ in M	nein	ja	nein
von $M \times M$ in $M \times \Delta_2$	nein	ja	nein
von $M \times \Delta_2$ in $M \times M$	ja	nein	nein

Begründung: Über die Anzahl der Elemente in den verschiedenen Mengen.

Haben zwei endliche Mengen A und B gleich viele Elemente, so kann man jedem Element von A eindeutig ein Element von B zuordnen und umgekehrt. Man kann z.B. die Elemente von A in einer bestimmten Reihenfolge anordnen, ebenso die Elemente von B; dann bildet man das erste Element von A auf das erste Element von B ab, das zweite Element von A auf das zweite Element von B, u.s.w. Diese Abbildung ist bijektiv (eineindeutig), d.h. injektiv und surjektiv. Den Fall $|A| = |B|$ haben wir bei $A = M$ und $B = \Delta_2 \times \Delta_2$. Selbstverständlich gibt es auch Abbildungen von M in $\Delta_2 \times \Delta_2$, die nicht injektiv und nicht surjektiv sind, z.B. kann man alle Elemente von M auf $(0,0) \in \Delta_2 \times \Delta_2$ abbilden.

Hat die endliche Menge A mehr Elemente als B, gilt also $|A| > |B|$, so existieren surjektive Abbildungen, denn es gibt ja „genügend" Elemente in A, so daß jedes Element aus B als Funktionswert eines Elementes aus A angenommen werden kann. Aber es kann keine injektive Abbildung geben, da die Elemente von B „nicht ausreichen", damit jedes Element von A einen anderen Funktionswert hat[1]. Die Situation $|A| > |B|$ haben wir sowohl bei $A = \Delta_2 \times M$, $B = M$, als auch bei $A = M \times M$, $B = M \times \Delta_2$.

Gilt schließlich $|A| < |B|$ für die endlichen Mengen A und B, so kann man zwar jedem Element von A ein anderes Element von B zuordnen, d.h. es gibt eine injektive Abbildung, aber eine surjektive Abbildung ist nicht möglich, da jedem Element aus A nur genau ein Element aus B zugeordnet werden darf, so daß Elemente aus B „übrig bleiben". $|A| < |B|$ haben wir bei $A = M \times \Delta_2$ und $B = M \times M$.

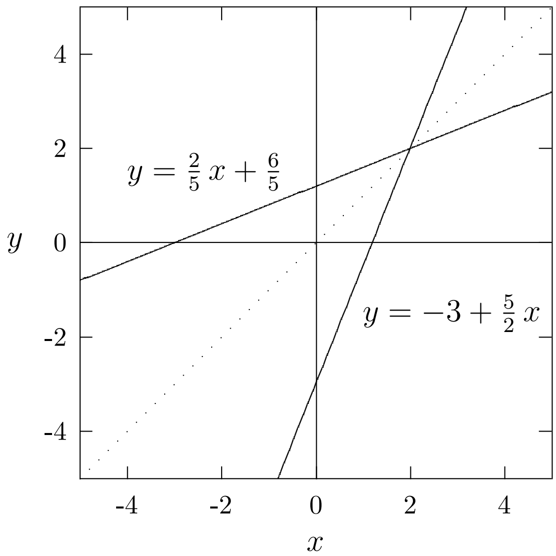
3. Da $|M| = 4 > 2 = |\Delta_2|$ ist, gibt es keine injektive Abbildung (Begründung s.o.). Also existiert auch keine bijektive Abbildung. Aber wieviele surjektive

[1] Dies ist eine Anwendung des Schubfachprinzips (engl.: pigeonhole principle). Gibt es mehr Tauben als Taubenschläge, so halten sich in mindestens einem Taubenschlag mehrere Tauben auf. Mit „mehrere" ist dabei „mindestens zwei" gemeint.

Abbildungen gibt es? Eine Abbildung $f : M \to \Delta_2$ wird vollständig durch das 4-Tupel $(f(a), f(b), f(c), f(d))$ beschrieben. Als Funktionswerte können die Elemente von Δ_2 angenommen werden, d.h. 0 und 1. Also ist z.B. $(1, 0, 1, 1)$ eine mögliche Abbildung, oder $(0, 0, 1, 0)$. Die 4-Tupel können als Bitstrings der Länge 4 aufgefasst werden. Davon gibt es 16. Bei einer surjektiven Abbildung muß mindestens einmal die 0 und mindestens einmal die 1 vorkommen. Dies ist bei $(0, 0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1, 1)$ nicht der Fall. Also gibt es $16 - 2 = 14$ surjektive Abbildungen von M auf Δ_2.

Aufgabe 4.
Gesucht ist die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3 + 5x/2$. Skizzieren Sie die beiden Graphen.

Lösung: Die Umkehrfunktion zu $y = -3+5x/2$ wird in zwei Schritten berechnet.
1. Schritt: Auflösen der Gleichung nach x. Es folgt $y + 3 = \frac{5}{2}\,x$ und daraus $x = \frac{2}{5}\,y + \frac{6}{5}$.
2. Schritt: Vertauschen von x und y liefert dann die gesuchte Umkehrfunktion $y = \frac{2}{5}\,x + \frac{6}{5}$.



Aufgabe 5.
Von einer Folge sind die beiden Glieder $a_k = 40$ und $a_{k+2} = 90$ bekannt. Welchen Wert müssen die Folgenglieder a_{k+1} und a_{k+3} haben, wenn es sich

1. um eine arithmetische Folge (konstanter Zuwachs),
2. um eine geometrische Folge (gleicher prozentualer Zuwachs) handelt?

Lösung:

1. Bei einer arithmetischen Folge, also einer Folge mit dem gleichen konstanten

Zuwachs d von einem Folgenglied zum nächsten, ist

$$a_k + d = a_{k+1}$$

und

$$a_k + 2d = a_{k+2}.$$

Daraus folgt

$$2d = a_{k+2} - a_k = 90 - 40 = 50,$$

also

$$d = 25.$$

Damit ist

$$a_{k+1} = a_k + d = 40 + 25 = 65$$

und

$$a_{k+3} = a_{k+2} + d = 90 + 25 = 115.$$

2. Bei einer geometrischen Folge, d. h. einer Folge mit dem gleichen prozentualen Zuwachs q von einem Folgenglied zum nächsten, gilt

$$a_k \cdot q = a_{k+1}$$

und

$$a_k \cdot q^2 = a_{k+2}.$$

Also folgt

$$q^2 = \frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{90}{40} = \frac{9}{4}$$

und

$$q = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Damit ist

$$a_{k+1} = a_k \cdot q = 40 \cdot \frac{3}{2} = 60$$

und

$$a_{k+3} = a_{k+2} \cdot q = 90 \cdot \frac{3}{2} = 135.$$

Aufgabe 6.
Gesucht ist die Summe aller durch 7 teilbaren positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 1000 sind.

Lösung: Wir können die Summe mit Hilfe der Gaußschen Summenformel

$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$$

berechnen, aber auch direkt die Idee verwenden, die der Gaußschen Formel zugrunde liegt.

Die größte durch 7 teilbare Zahl kleiner als 1000 ist 994. Also ist die Summe gleich

$$\begin{aligned}
7 + 14 + \ldots + 994 &= 7 \cdot (1 + 2 + \ldots + 142) \\
&= 7 \cdot \sum_{n=1}^{142} n = 7 \cdot \frac{142 \cdot 143}{2} \\
&= 7 \cdot 71 \cdot 143 = 71071.
\end{aligned}$$

Oder man überlegt, daß der erste plus der letzte Summand gleich 1001 ist, ebenso der zweite und der vorletzte Summand u.s.w. Da wir insgesamt 142 Summanden haben, bekommen wir 71 mal 1001, erhalten also 71071 als Gesamtsumme.

Aufgabe 7.
Berechnen Sie mit der Formel für abbrechende geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{9} 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{9} (-2)^n.$$

Lösung: In der Vorlesung wurde gezeigt, daß

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

mit beliebigem $m \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ gilt. Damit bekommen wir die Summenwerte

$$\sum_{n=0}^{9} 2^n = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{1 - 1024}{-1} = 1023$$

und

$$\sum_{n=0}^{9} (-2)^n = \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = \frac{1 - 1024}{3} = -\frac{1023}{3} = -341.$$

Aufgabe 8.
Wird eine reelle Zahl x auf die nächste ganze Zahl kleiner oder gleich x abgerundet, so schreibt man das Ergebnis mit der sogenannten „Gauß-Klammer“ als $[x]$.

Die Gauß-Klammer ist also eine Funktion, die der reellen Zahl x die größte ganze Zahl zuordnet, die kleiner oder gleich x ist, d.h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x] := n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $n \leq x < n + 1$.

In einigen Programmiersprachen wird diese Funktion als Floor-Funktion bezeichnet. Die folgenden Schreibweisen sind gebräuchlich: $f(x) = [x] = \text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$.

Analog ordnet die Ceiling-Funktion der reellen Zahl x die kleinste ganze Zahl zu, die größer oder gleich x ist. Man schreibt $f(x) = \text{ceil}(x) = \lceil x \rceil$. Es ist dann $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lceil x \rceil := n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $n - 1 < x \leq n$.

Kurz gesagt: x wird auf eine ganze Zahl gerundet; Abrunden gibt $\lfloor x \rfloor$ und Aufrunden gibt $\lceil x \rceil$.

1. Welche Werte ergeben sich für $\lfloor 1/2 \rfloor$, $\lceil 1/2 \rceil$, $\lfloor -1/2 \rfloor$, $\lceil -1/2 \rceil$, $\lfloor 3,7 \rfloor$, $\lceil 3,7 \rceil$, $\lfloor 14 \rfloor$ und $\lceil 14 \rceil$?

2. Zeichnen Sie die Graphen von $y = \lfloor x \rfloor$ und $y = \lceil x \rceil$.

3. Skizzieren Sie $y = \lfloor -x \rfloor$ und $y = \lceil -x \rceil$. Welche Zusammenhänge kann man erkennen?

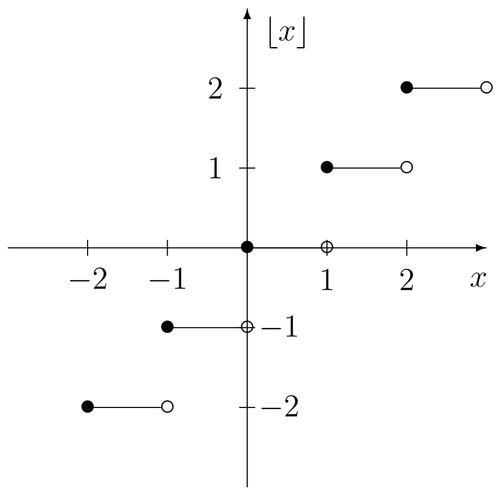
4. Welche Werte ergeben sich für $x - \lfloor x \rfloor$ und für $x - \lceil x \rceil$ (sowohl bei positivem als auch bei negativem x)?

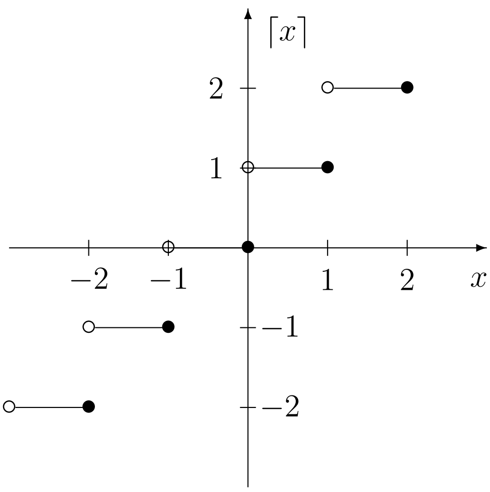
5. Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f(x) = x - 4 \cdot [x/4]$.

Lösung:

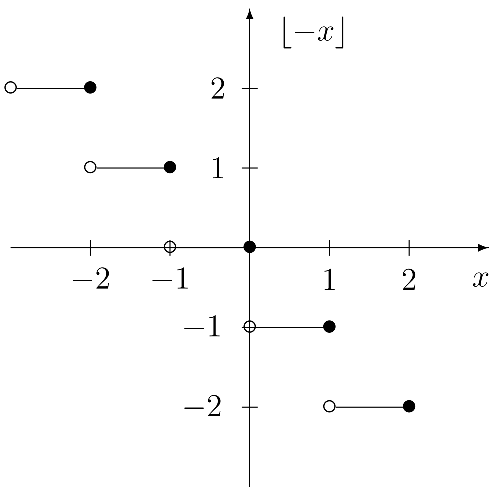
1. Es ist $\lfloor 1/2 \rfloor = 0$, $\lceil 1/2 \rceil = 1$, $\lfloor -1/2 \rfloor = -1$, $\lceil -1/2 \rceil = 0$, $\lfloor 3,7 \rfloor = 3$, $\lceil 3,7 \rceil = 4$, $\lfloor 14 \rfloor = 14$ und $\lceil 14 \rceil = 14$.

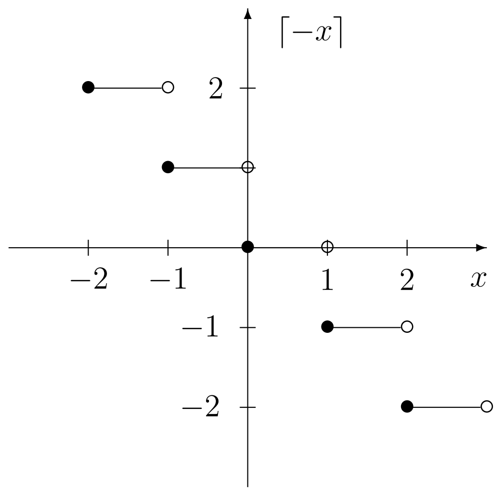
2. Die folgenden Graphen stellen die Funktionen $f(x) = \lfloor x \rfloor$ und $f(x) = \lceil x \rceil$ dar.





3. Die folgenden Graphen stellen die Funktionen $f(x) = \lfloor -x \rfloor$ und $f(x) = \lceil -x \rceil$ dar.





Ein Vergleich zeigt, daß die Kurve von $y = \lfloor -x \rfloor$ gleich der Spiegelung von $y = \lceil x \rceil$ an der x-Achse ist, d.h. daß

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$$

gilt. Ferner sieht man, daß die Kurve von $y = \lceil -x \rceil$ gleich der Spiegelung von $y = \lfloor x \rfloor$ an der x-Achse ist, so daß

$$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$$

gilt.

4. *1. Fall:* $x - \lfloor x \rfloor$.

   Für $x \geq 0$ erhält man die Nachkommastellen von x, zum Beispiel ist

   $$3,81 - \lfloor 3,81 \rfloor = 3,81 - 3 = 0,81.$$

   Für $x < 0$ ergibt sich $1 -$ (Nachkommastellen von x), wenn die Nachkommastellen positiv gerechnet werden, zum Beispiel

   $$-3,81 - \lfloor -3,81 \rfloor = -3,81 - (-4) = -3,81 + 4 = 0,19.$$

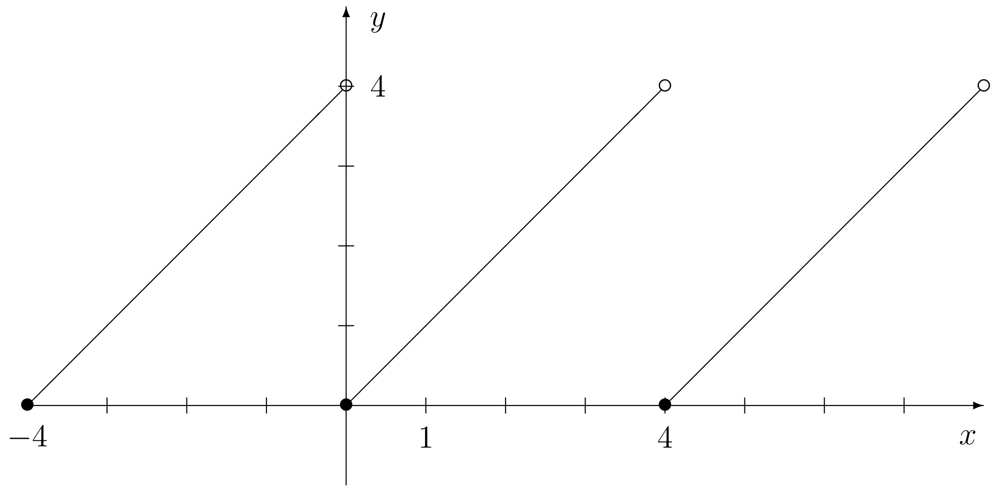
   2. Fall: $x - \lceil x \rceil$. Für $x \geq 0$ bekommt man (Nachkommastellen von x) $- 1$, zum Beispiel

   $$3,81 - \lceil 3,81 \rceil = 3,81 - 4 = 0,81 - 1 = -0,19.$$

   Für $x < 0$ ist das Resultat gleich den Nachkommastellen von x, einschließlich des negativen Vorzeichens, zum Beispiel

   $$-3,81 - \lceil -3,81 \rceil = -3,81 - (-3) = -3,81 + 3 = -0,81.$$

5. Die Funktion $f(x) = x - 4 \cdot [x/4]$ ist periodisch.



   Hierbei ist zu beachten, daß sich für den Ausdruck $[x/4]$ die folgenden Werte ergeben:

   $$\left[\frac{x}{4}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für} \quad 4 \leq x < 8 \\ -1 & \text{für} \quad -4 \leq x < 0 \\ & \text{u.s.w.} \end{cases}$$