

Relationen: Verkettungen, Wege, Hüllen

Aufgabe 1.

Es bezeichne R die Relation $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ und S die Relation $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$. Geben Sie $S \circ R$ an. Skizzieren Sie die Verknüpfung mit Hilfe gerichteter Graphen. Berechnen Sie die Boolesche Matrix der Relation $S \circ R$ aus den Booleschen Matrizen von S und R .

Lösung: Schreibweise: Zu $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$ ist

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, c) \mid (\exists b) ((a, b) \in R_1) \wedge ((b, c) \in R_2)\}.$$

Die Relationen R und S sind vorgegeben als

$$\begin{aligned} R &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}, \\ S &= \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}. \end{aligned}$$

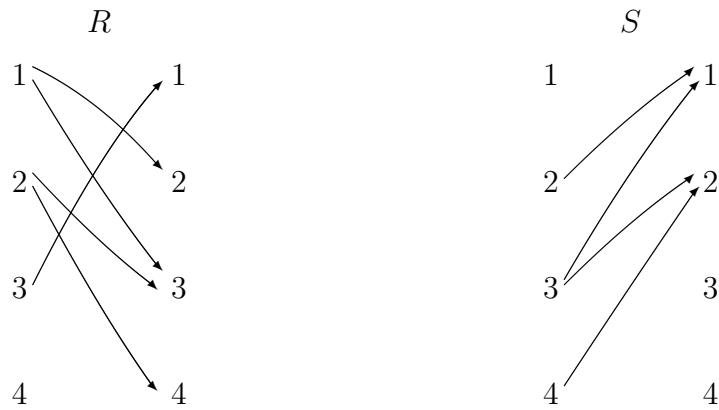
Entsprechend der Definition für die Verknüpfung von Relationen können wir nun feststellen, welche Paare in $S \circ R$ liegen.

$$\begin{aligned} (1, 2) \in R \wedge (2, 1) \in S &\Rightarrow (1, 1) \in S \circ R \\ (1, 3) \in R \wedge (3, 1) \in S &\Rightarrow (1, 1) \in S \circ R \\ (1, 3) \in R \wedge (3, 2) \in S &\Rightarrow (1, 2) \in S \circ R \\ (2, 3) \in R \wedge (3, 1) \in S &\Rightarrow (2, 1) \in S \circ R \\ (2, 3) \in R \wedge (3, 2) \in S &\Rightarrow (2, 2) \in S \circ R \\ (2, 4) \in R \wedge (4, 2) \in S &\Rightarrow (2, 2) \in S \circ R \end{aligned}$$

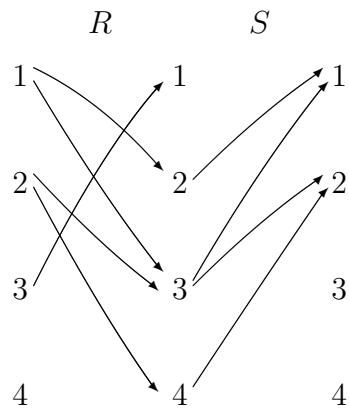
Zwar ist $(3, 1) \in R$, aber in S ist kein Paar mit der 1 an der ersten Position, d.h. über $(3, 1) \in R$ wird kein Beitrag zu $S \circ R$ geliefert. Insgesamt habe wir damit

$$S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

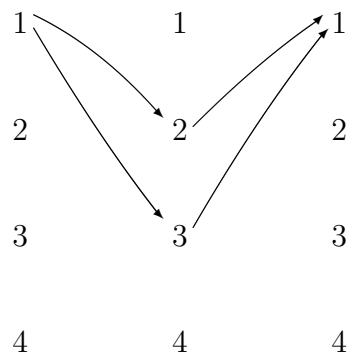
Die Verknüpfung von R und S läßt sich anschaulich sehr schön darstellen, wenn man R und S nicht wie üblich zeichnet, sondern die Ecken zweimal nebeneinander auflistet.



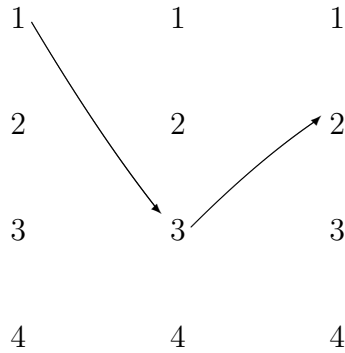
Werden jetzt die Endpunkte von R und die Anfangspunkte von S zusammengelegt, so besteht $S \circ R$ aus allen Paaren, für die es mindestens einen Weg von links nach rechts über ein „verbindendes“ Element in der Mitte gibt.



Zum Beispiel sieht man auf zwei Arten, daß $(1, 1)$ in $S \circ R$ liegt:



Ferner gehört zum Beispiel das Paar $(1, 2)$ wegen des folgenden Weges zu $S \circ R$:



Um die Boolesche Matrix der Relation $S \circ R$ aus den Booleschen Matrizen von R und S berechnen zu können, schreiben wir diese Matrizen zunächst auf.

R	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0

S	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	1	0	0
4	0	1	0	0

Die Boolesche Matrix der Relation $S \circ R$ wird mit einer abgeänderten Matrizenmultiplikation berechnet, bei der „ \vee “ (das logische Oder) anstelle von „ $+$ “ verwendet wird, und „ \wedge “ (das logische Und) anstelle von „ \cdot “.

Wir schreiben die Multiplikation in einem Rechenschema auf:

	S						
R		$S \circ R$					

Zum Beispiel entsteht das Element in der zweiten Zeile und der ersten Spalte durch

$$(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1.$$

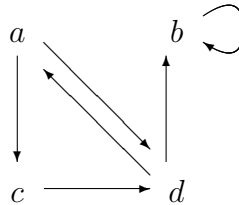
Im folgenden Schema werden diejenigen Elemente der Booleschen Matrizen dargestellt, die an dieser Berechnung beteiligt sind.

Aufgabe 2.

Es sei die Relation $R = \{(a, c), (a, d), (b, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$ auf der Menge $M = \{a, b, c, d\}$ gegeben. Zeichnen Sie den gerichteten Graphen von R , und bestimmen Sie mit dessen Hilfe die Relationen R^2 und R^3 .

Lösung: Es gibt zwei Möglichkeiten, die Relation graphisch zu veranschaulichen.

- 1. Darstellung



Der gerichtete Graph mit den Ecken a, b, c und d und den gerichteten Kanten entsprechend der Relation wird gezeichnet. Man erhält R^2 und R^3 durch

$$R^2 = \{(x, y) \mid \text{es existiert ein Weg der Länge 2 von } x \text{ nach } y\},$$

$$R^3 : \text{ analog mit Länge 3.}$$

Konkret kann man zum Beispiel systematisch durchprobieren, ob (a, a) in R^2 ist, (a, b) in R^2 ist, (a, c) in R^2 ist, u.s.w., wobei Tabellen praktisch sind.

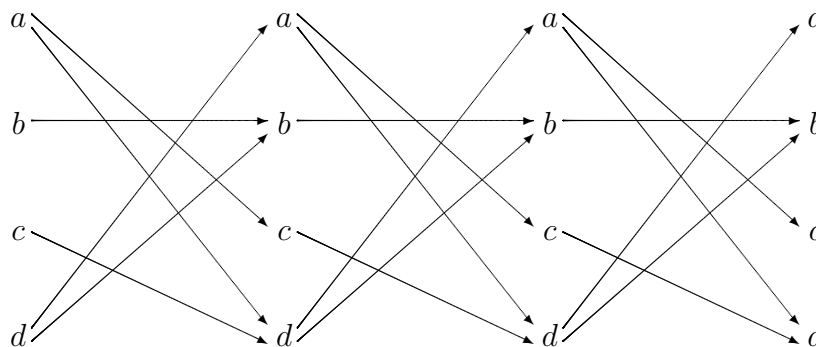
	in R^2	in R^3
(a, a)	ja	ja
(a, b)	ja	ja
(a, c)	nein	ja
(a, d)	ja	ja

	in R^2	in R^3
(b, a)	nein	nein
(b, b)	ja	ja
(b, c)	nein	nein
(b, d)	nein	nein

	in R^2	in R^3
(c, a)	ja	nein
(c, b)	ja	ja
(c, c)	nein	ja
(c, d)	nein	ja

	in R^2	in R^3
(d, a)	nein	ja
(d, b)	ja	ja
(d, c)	ja	nein
(d, d)	ja	ja

- 2. Darstellung

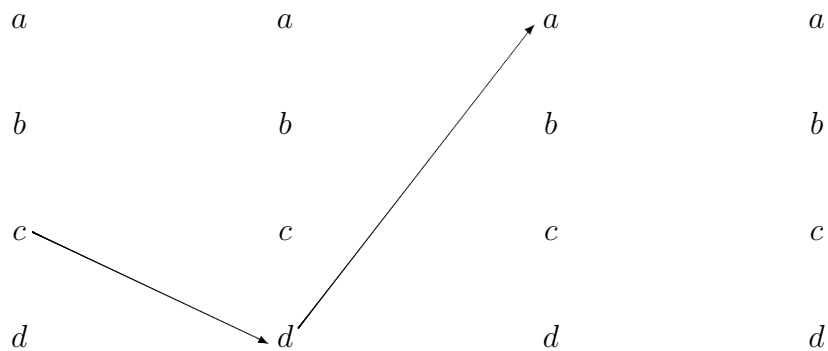


Die Spalte mit den Ecken a, b, c und d wird viermal nebeneinander geschrieben. Von einer Spalte zur nächsten werden gerichtete Kanten entsprechend der Relation gezeichnet. Hier bekommt man R^2 und R^3 durch

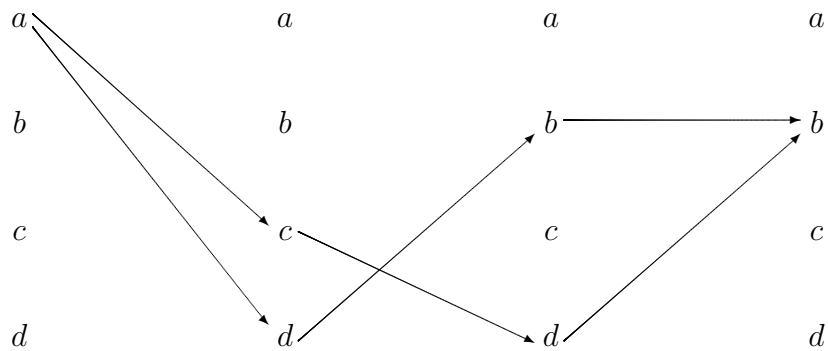
R^2 : besteht aus allen Paaren (x, y) , für die ein Weg der Länge 2 von dem Element x in der linken Spalte zu dem Element y zwei Spalten weiter existiert;

R^3 : besteht aus allen Paaren (x, y) , für die ein Weg der Länge 3 von x in der linken Spalte zu y in der rechten Spalte existiert.

Diese Darstellung ist zwar aufwendiger als die erste, aber die Wege sind leicht zu erkennen. Im folgenden ist zum Beispiel ein Weg der Länge 2 von c nach a herausgestellt, der zeigt, daß $(c, a) \in R^2$ gilt.



Im folgenden sehen wir, daß es zwei Wege der Länge 3 von a nach b gibt. Also gilt $(a, b) \in R^3$. (Selbstverständlich hätte schon ein Weg genügt.)



Insgesamt kann man also unmittelbar ablesen, daß sich

$$R^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

und

$$R^3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, d)\}$$

für die gesuchten Relationen ergibt.

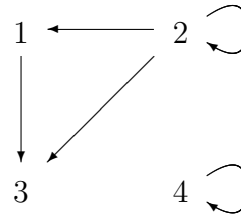
Aufgabe 3.

Es sei R die Relation $\{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 4)\}$ auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie R^{-1} an. Schreiben Sie zu R und R^{-1} die Booleschen Matrizen auf, und zeichnen Sie die gerichteten Graphen.

Lösung:

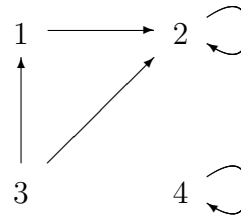
- $R = \{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 4)\}$

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	1	1	1	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	1



- $R^{-1} = \{(3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 4)\} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 4)\}$

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	1	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	0	1



Matrix: Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

Graph: Richtungen der Pfeile umdrehen.

Aufgabe 4.

Bestimmen Sie zu den folgenden Relationen auf der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ die reflexive, die symmetrische und die transitive Hülle. Zeichnen Sie zu jeder Relation den gerichteten Graphen.

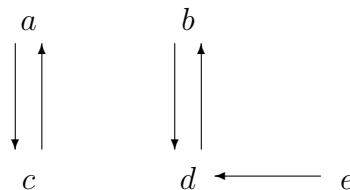
$$R_1 = \{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$$

$$R_2 = \{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$$

$$R_3 = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$$

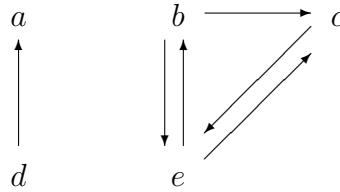
Lösung:

1. $R_1 = \{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$



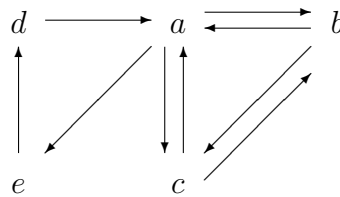
- reflexive Hülle: $R_1 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
- symmetrische Hülle: $R_1 \cup \{(d, e)\}$
- transitive Hülle: $R_1 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, b)\}$

2. $R_2 = \{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$



- reflexive Hülle: $R_2 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
- symmetrische Hülle: $R_2 \cup \{(a, d), (c, b)\}$
- transitive Hülle: $R_2 \cup \{(b, b), (c, b), (c, c), (e, e)\}$

3. $R_3 = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$



- reflexive Hülle: $R_3 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
- symmetrische Hülle: $R_3 \cup \{(a, d), (d, e), (e, a)\}$
- transitive Hülle: $\{a, b, c, d, e\} \times \{a, b, c, d, e\}$, d.h. die transitive Hülle besteht aus allen Paaren, die überhaupt möglich sind.

Zur Bestimmung der transitiven Hülle ist ein Satz aus der Vorlesung hilfreich: Das Paar (x, y) liegt in der transitiven Hülle von R , wenn es in R einen Weg von x nach y gibt.