Logik

Gesetze der Aussagenlogik, Normalformen

- Satz (Einige Gesetze der Aussagenlogik)

  A, B und C seien Aussagenvariablen.

  1. ***Kommutativität*** bei Konjunktion und Disjunktion.

  $$A \wedge B \equiv B \wedge A$$
  $$A \vee B \equiv B \vee A$$

  2. ***Assoziativität*** bei Konjunktion und Disjunktion.

  $$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$$
  $$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$$

  3. ***Distributivität***

  $$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
  $$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

  4. ***doppelte Verneinung***

  $$\neg(\neg A) \equiv A$$

  5. ***Kontraposition***

  $$A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A)$$

  6. ***Regeln von de Morgan*** bei der Negation einer Konjunktion bzw. Disjunktion.

  $$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$
  $$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$$

- Beweis der Gesetze mit Wahrheitstafeln.

- Zu einer aussagenlogischen Formel kann eine Wahrheitstafel aufgestellt werden. Umgekehrt sei nun eine Wahrheitstafel gegeben und eine „passende“ aussagenlogische Formel ist gesucht.

- Anmerkung: Eine Wahrheitstafel mit 2 Aussagenvariablen hat 4 Zeilen. Eine Wahrheitstafel mit n Aussagenvariablen besteht aus 2^n Zeilen.

- Wir betrachten zwei Wege, auf denen man systematisch von der Wahrheitstafel zur aussagenlogischen Formel kommt.

  1. Wir gehen von den Zeilen aus, die den Wert *wahr* haben. Es ergibt sich eine *Oder*-Verknüpfung von Teilformeln, die nur *Und*-Verknüpfungen (von Variablen oder negierten Variablen) enthalten.
  2. Wir gehen von den Zeilen mit dem Wert *falsch* aus. Es entsteht eine *Und*-Verknüpfung von Klammern, die nur *Oder*-Verknüpfungen enthalten.

- Durchführung der beiden Methoden an einem Beispiel.

- Definition

  Man bezeichnet aussagenlogische Variablen und deren Negationen durch den Oberbegriff ***Literale***.

- Definition (Disjunktive Normalform)

  Als ***disjunktive Normalform*** (kurz: DNF) einer aussagenlogischen Formel ϕ bezeichnet man eine Darstellung, in der Teilformeln durch *Oder* verknüpft werden, wobei in den Teilformeln nur *Und*-Verknüpfungen von Literalen vorkommen. D.h.

  $$\phi = (\ldots) \vee (\ldots) \vee \ldots \vee (\ldots),$$

  und die Klammern sind von der Bauart

  $$(L_1 \wedge L_2 \wedge \ldots \wedge L_n)$$

  mit Literalen L_i.

- Definition (Konjunktive Normalform)

  Eine ***konjunktive Normalform*** (kurz: KNF) liegt vor, wenn ϕ eine *Und*-Verknüpfung von Teilformeln ist, die nur *Oder*-Verknüpfungen von Literalen enthalten, d.h.

  $$\phi = (\ldots) \wedge (\ldots) \wedge \ldots \wedge (\ldots),$$

  und die Klammern sind von der Form

  $$(L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n)$$

  mit Literalen L_i. Diese Teilformeln aus *Oder*-verknüpften Literalen heißen auch ***Klauseln***.

- Satz

  Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es eine äquivalente Darstellung in KNF und eine in DNF.

- Anmerkung: Da wir jede Formel ϕ in KNF oder DNF schreiben können, folgt, daß für beliebiges ϕ die Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ ausreichen. Durch weiteres Umformen kann man mit einem einzigen Operator auskommen.

- Neben den fünf Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ sind noch weitere logische Operatoren gebräuchlich,

  1. das Ausschließende Oder: $\oplus$ (engl.: exclusive or, XOR),
  2. der Sheffer-Operator: $\mid$ (engl.: Sheffer stroke, NAND),
  3. der Peirce-Operator: $\downarrow$ (engl.: Peirce arrow, NOR),

  wobei NAND aus „not and“ gebildet wurde und NOR aus „not or“.

- Wahrheitstafeln für $\oplus$ sowie $|$ und $\downarrow$.

- Satz

  Zu jeder aussagenlogischen Formel ϕ gibt es eine logisch äquivalente Formel, die nur den Sheffer-Operator (NAND) enthält, sowie eine logisch äquivalente Formel, in der nur der Peirce-Operator (NOR) vorkommt.