

Mengenlehre

Ein kurzer Überblick über Zahlenmengen, Begriff der Primzahlen

- Wir verwenden spezielle Symbole für die wichtigsten Mengen von Zahlen.

- *natürliche Zahlen* : \mathbb{N}
- *ganze Zahlen* : \mathbb{Z}
- *rationale Zahlen* : \mathbb{Q}
- *reelle Zahlen* : \mathbb{R}
- *komplexe Zahlen* : \mathbb{C}

Hierbei sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Wollen wir die Null dazunehmen, schreiben wir \mathbb{N}_0 , also $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Es gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Insbesondere gibt es Zahlen, die nicht als Brüche darstellbar sind.

- Satz

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

- Anmerkung: Reelle Zahlen, die nicht rational sind, werden irrationale Zahlen genannt. Also sagt der Satz, daß $\sqrt{2}$ irrational ist.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

- Hilfssatz

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$n^2 \text{ gerade} \Rightarrow n \text{ gerade.}$$

- Sowohl Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen als auch Dezimalzahlen mit unendlich vielen periodischen Nachkommastellen lassen sich als Brüche schreiben.

Irrationale Zahlen hingegen haben unendlich viele nicht-periodische Nachkommastellen.

- Beispiele für irrationale Zahlen.
- Beispiele für das Umrechnen von Dezimalzahlen in Brüche, speziell auch bei unendlich vielen periodischen Nachkommastellen.

- Problemstellung: Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung. Skizze.
- Idee: Einführung „neuer Zahlen“; Erweiterung von \mathbb{R} (ähnlich: Erweiterung von \mathbb{Q} zu \mathbb{R}).

- Definition

Das Symbol i sei eine „Zahl“ mit $i^2 = -1$. Wir nennen i die **imaginäre Einheit**.

- Anmerkung: Das Rechnen mit i „wie im Reellen“ unter Berücksichtigung von $i^2 = -1$ führt zu sinnvollen Anwendungen. Vielfache von i sind dann z.B. $2i$, $\frac{5}{2}i$ und $(-\frac{7}{3})i$. Wird noch eine reelle Zahl addiert, entstehen Ausdrücke wie z.B. $6 + 2i$ oder $5 - \frac{7}{3}i$. Ferner ist $2i = i2$ und $6 + 2i = 2i + 6$ u.s.w.

- Definition

Zahlen der Gestalt bi mit $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ heißen (**rein**) **imaginäre Zahlen**.

Zahlen der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ heißen **komplexe Zahlen**. Wir bezeichnen

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$$

als **Menge der komplexen Zahlen**.

Zu $z = a + bi$ heißt $a = \operatorname{Re}(z)$ der **Realteil** von z und $b = \operatorname{Im}(z)$ der **Imaginärteil** von z .

- Darstellung der komplexen Zahlen in der **komplexen Ebene** (Gaußschen Ebene).
- Anmerkung: Es gilt

$$\begin{aligned} a + bi = c + di &\Leftrightarrow a = c \text{ und } b = d, \\ a + bi = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \text{ und } b = 0, \\ a + bi \neq 0 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0. \end{aligned}$$

- Rechenregeln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division).

- Definition

Eine **Primzahl** ist eine ganze Zahl größer als 1, die keine positiven Teiler außer 1 und sich selbst hat. (D.h. es ist eine Zahl $p > 1$ mit exakt zwei positiven Teilern: 1 und p .)

- Auflistung aller Primzahlen bis zu einer vorgegebenen Zahl n mit dem Sieb des Eratosthenes.

- Satz

Jede ganze Zahl größer als 1 ist ein Produkt aus Primzahlen.

- **Primfaktorzerlegung** einer ganzen Zahl $n > 1$ an Beispielen.

- Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen. (Gleichwertig: Es gibt keine größte Primzahl.)

- Anmerkung: Manchmal wird das Symbol \mathbb{P} für die Menge der Primzahlen verwendet. Die Menge \mathbb{P} hat also unendliche Mächtigkeit, $|\mathbb{P}| = \infty$.

- Satz

Die Primfaktorzerlegung ist eindeutig. D.h. zu jeder ganzen Zahl $n > 1$ gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_l^{a_l}$$

mit Primzahlen $p_1 < p_2 < \dots < p_l$ und Exponenten $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{N}$.