Relationen

Grundlegende Eigenschaften

- Satz

  Es sei M eine endliche Menge. Dann ist die Anzahl der Relationen auf M gleich
  $$2^{|M|^2}.$$
  Hierbei bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M.

- Beweis

- Anmerkung: Die Anzahl der Relationen wächst sehr schnell.

$\vert M\vert$	Anzahl der Relationen
1	2
2	16
3	512
4	65536
5	33554432
6	68719476736
7	562949953421312
8	18446744073709551616
9	2417851639229258349412352
10	1267650600228229401496703205376

- Definition (Eigenschaften von Relationen)

  Es sei $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf der Menge M. Dann heißt R

  1. ***reflexiv***, wenn $x\ R\ x$ für alle $x \in M$,
  2. ***symmetrisch***, wenn $(x\ R\ y) \Rightarrow (y\ R\ x)$ für alle $x, y \in M$,
  3. ***antisymmetrisch***, wenn $((x\ R\ y) \wedge (y\ R\ x)) \Rightarrow (x = y)$ für alle $x, y \in M$,
  4. ***asymmetrisch***, wenn $(x\ R\ y) \Rightarrow \neg(y\ R\ x)$ für alle $x, y \in M$,
  5. ***transitiv***, wenn $((x\ R\ y) \wedge (y\ R\ z)) \Rightarrow (x\ R\ z)$ für alle $x, y, z \in M$.

- Anmerkung: Natürlich kann es bei einer symmetrischen Relation auf M auch Elemente $x, y \in M$ mit $x \not R\ y$ geben, für diese gilt dann auch $y \not R\ x$.

- Anmerkung: Die Bedeutung der Antisymmetrie wird noch klarer, wenn man die Bedingung mit Kontraposition umformt:

$$[((x\ R\ y) \wedge (y\ R\ x)) \Rightarrow (x = y)] \Leftrightarrow [(x \neq y) \Rightarrow \neg((x\ R\ y) \wedge (y\ R\ x))],$$

  d.h. für zwei voneinander verschiedene Elemente x und y aus M kann nicht gleichzeitig $x\ R\ y$ und $y\ R\ x$ gelten.

- Anmerkung: Bei einer asymmetrischen Relation kann für kein $x \in M$ die Beziehung $x\ R\ x$ gelten.

- Bedeutung der Eigenschaften bei der Darstellung von Relationen durch gerichtete Graphen und Boolesche Matrizen.

- Beispiele