Logik: Junktoren, Normalformen, Prädikate und Quantoren

Aufgabe 1.
Finden Sie eine Formel, die logisch äquivalent zu $A \oplus B$ ist und nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ enthält. (Hierbei ist $\oplus$ das exklusive Oder.) Hinweis: Arbeiten Sie mit einer Wahrheitstafel.

Aufgabe 2.
Stellen Sie zunächst den Junktor $\neg$ und anschließend den Junktor $\wedge$ mit dem Sheffer-Operator $|$ (NAND-Operator) dar.

Aufgabe 3.
Stellen Sie zu der folgenden Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel ϕ in disjunktiver und eine in konjunktiver Normalform auf.

x	y	z	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Aufgabe 4.
Es sei $P(x)$ ein Prädikat und $M = \{a, b, c\}$ die Grundmenge zu x. Zu den folgenden Aussagen sollen logisch äquivalente Aussagen angegeben werden, die keine Quantoren enthalten.

a) $\forall x P(x)$ b) $\exists x P(x)$ c) $\neg\forall x P(x)$

d)$\neg\exists x P(x)$ e) $\forall x \neg P(x)$ f) $\exists x \neg P(x)$

Aufgabe 5.
Es sei $P(x)$ das Prädikat „$x + 1 > 2x$“. Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen, wenn die Grundmenge aus allen ganzen Zahlen besteht?

a) $P(0)$ b) $P(-1)$ c) $P(1)$ d) $\exists x P(x)$

e) $\forall x P(x)$ f) $\exists x \neg P(x)$ g) $\forall x \neg P(x)$ h) $\neg\forall x P(x)$

Aufgabe 6.
Das Prädikat $P(x, y)$ stehe für „Student/Studentin x hat die Vorlesung y besucht“. Die Grundmenge zu x seien alle Studierenden und die Grundmenge zu y seien alle Vorlesungen des Fachbereichs MNI. Schreiben Sie die folgenden Aussagen als deutsche Sätzen auf.

a) $\exists x \exists y P(x, y)$ b) $\exists x \forall y P(x, y)$ c) $\exists y \forall x P(x, y)$

d) $\forall x \exists y P(x, y)$ e) $\forall y \exists x P(x, y)$ f) $\forall x \forall y P(x, y)$

Aufgabe 7.
Es sei $P(x, y)$ das Prädikat „x ist ein Teiler von y“. Die Grundmengen für x und für y sei die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist eine Aussage? Welche der Aussagen ist wahr, welche ist falsch?

a) $P(10, y)$ b) $P(x, 100)$ c) $\forall x P(x, y)$ d) $\exists x P(x, 7)$

e) $\forall x \exists y P(x, y)$ f) $P(3, 9)$ g) $P(3, 7)$ h) $\exists x P(x, 9)$

i) $\forall x P(x, 9)$ j) $\exists x \forall y P(x, y)$ k) $\forall x P(x, x)$ l) $\forall y P(1, y)$