Logik: Junktoren, Normalformen, Prädikate und Quantoren

Aufgabe 1.
Finden Sie eine Formel, die logisch äquivalent zu $A \oplus B$ ist und nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ enthält. (Hierbei ist $\oplus$ das exklusive Oder.) Hinweis: Arbeiten Sie mit einer Wahrheitstafel.

Lösung: Es gibt verschiedene Formeln, die logisch äquivalent zu $A \oplus B$ sind. In der folgenden Wahrheitstafel wird gezeigt, daß

$$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$$

gilt. Man kann aber sehr ähnlich auch

$$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$$

bekommen. Die Gleichwertigkeit der beiden Formeln sieht man auch unmittelbar mit einer Regel von de Morgan, nach der

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$

gilt. Die anschauliche Bedeutung des exklusiven Oder kommt in der Formel aus der zweiten Äquivalenz $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ deutlich zum Ausdruck: ein Oder und gleichzeitig Nicht ein Und.

A	B	$A \oplus B$	$A \vee B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$(A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$
w	w	f	w	f	f	f	f
w	f	w	w	f	w	w	w
f	w	w	w	w	f	w	w
f	f	f	f	w	w	w	f

Aufgabe 2.
Stellen Sie zunächst den Junktor $\neg$ und anschließend den Junktor $\wedge$ mit dem Sheffer-Operator $\mid$ (NAND-Operator) dar.

Lösung: Die Bedeutung des Sheffer-Operators ist Nicht-Und, daher ja auch der Name NAND-Operator, d.h. es gilt die logische Äquivalenz

$$A \mid B \equiv \neg(A \wedge B).$$

Setzen wir speziell $B = A$ ein, bekommen wir, weil $(A \wedge A) \equiv A$ ist,

$$A \mid A \equiv \neg(A \wedge A) \equiv \neg A.$$

Der Junktor $\neg$ wird also mit dem Sheffer-Operator durch

$$\neg A \equiv A \mid A$$

dargestellt. Zur Verdeutlichung geben wir noch zwei Wahrheitstafeln an.

A	B	$A \wedge B$	$A \mid B$
w	w	w	f
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

A	$\neg A$	$A \wedge A$	$A \mid A$
w	f	w	f
f	w	f	w

Als nächstes wollen wir den Junktor $\wedge$ mit dem Sheffer-Operator darstellen. Dazu berücksichtigen wir, daß – mit einer doppelten Verneinung – der Ausdruck $A \wedge B$ die Negation von $\neg(A \wedge B)$ ist, also die Negation des Sheffer-Operators, so daß wir

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg(A \wedge B)) \equiv \neg(A \mid B)$$

haben. Oben haben wir aber gesehen, wie man eine Negation mit Hilfe des Sheffer-Operators darstellt, und können deshalb

$$\neg(A \mid B) \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$$

schreiben. Damit gilt insgesamt die Darstellung

$$A \wedge B \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B).$$

Zur Verdeutlichung wird auch noch die folgende Wahrheitstafel angegeben.

A	B	$A \wedge B$	$A \mid B$	$\neg(A \mid B)$	$(A \mid B) \mid (A \mid B)$
w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	f	f
f	f	f	w	f	f

Aufgabe 3.
Stellen Sie zu der folgenden Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel ϕ in disjunktiver und eine in konjunktiver Normalform auf.

x	y	z	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Lösung: Für die disjunktive Normalform von ϕ ergibt sich

$$\phi = (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Wir konstruieren die DNF von ϕ, indem wir diejenigen Zeilen der Wahrheitstafel betrachten, für die ϕ den Wahrheitswert 1 annimmt.

Für jede dieser Zeilen schreiben wir eine Klammer auf, die genau dann wahr wird, wenn die atomaren Variablen x, y und z die Werte aus dieser speziellen Zeile haben.

Die Klammern werden mit Oder verknüpft, so daß der Gesamtausdruck wahr ist, wenn die Variablen die speziellen Werte aus einer der 1-er Zeilen haben.

Mit einer entsprechenden Überlegung für die 0-Zeilen bekommen wir die konjunktive Normalform

$$\phi = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Die Klammern der KNF heißen Klauseln. Sie werden mit Und verknüpft, damit die Formel nur dann wahr wird, wenn die Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten keiner der 0-Zeilen entspricht. Jede Klausel gehört zu einer 0-Zeile und wird für genau diese 0-Zeile falsch und für alle anderen Zeilen wahr. Hat man eine 1-er Zeile, sind alle Klauseln wahr, und die Formel ist insgesamt wahr.

Man kann die KNF von ϕ auch herleiten, indem man die DNF des negierten Ausdrucks $\neg\phi$ aufstellt, diese dann negiert und mit den Regeln von de Morgan umformt; dies wird im folgenden durchgeführt.

$$\begin{aligned}
\phi &= \neg\Big((\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)\Big) \\
&= \big(\neg(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})\big) \wedge \big(\neg(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)\big) \wedge \big(\neg(x \wedge \bar{y} \wedge z)\big) \\
&= (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.
Es sei $P(x)$ ein Prädikat und $M = \{a, b, c\}$ die Grundmenge zu x. Zu den folgenden Aussagen sollen logisch äquivalente Aussagen angegeben werden, die keine Quantoren enthalten.

a) $\forall x P(x)$	b) $\exists x P(x)$	c) $\neg\forall x P(x)$
d)$\neg\exists x P(x)$	e) $\forall x \neg P(x)$	f) $\exists x \neg P(x)$

Lösung: Da die Grundmenge endlich ist, kann man den Allquantor durch endlich viele Konjunktionen und den Existenzquantor durch endlich viele Disjunktionen ersetzen. Damit ergeben sich die folgenden logischenÄquivalenzen.

a) $\forall x P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$

b) $\exists x P(x) \equiv P(a) \vee P(b) \vee P(c)$

c) $\neg\forall x P(x) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \equiv (\neg P(a)) \vee (\neg P(b)) \vee (\neg P(c))$

d) $\neg\exists x P(x) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \equiv (\neg P(a)) \wedge (\neg P(b)) \wedge (\neg P(c))$

e) $\forall x \neg P(x) \equiv (\neg P(a)) \wedge (\neg P(b)) \wedge (\neg P(c)) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c))$

f) $\exists x \neg P(x) \equiv (\neg P(a)) \vee (\neg P(b)) \vee (\neg P(c)) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$

Aufgabe 5.
Es sei $P(x)$ das Prädikat „$x + 1 > 2x$“. Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen, wenn die Grundmenge aus allen ganzen Zahlen besteht?

a) $P(0)$ b) $P(-1)$ c) $P(1)$ d) $\exists x P(x)$

e) $\forall x P(x)$ f) $\exists x \neg P(x)$ g) $\forall x \neg P(x)$ h) $\neg\forall x P(x)$

Lösung:

a) Die Aussage $P(0)$ bedeutet „$1 > 0$“, ist also wahr.

b) $P(-1)$ steht für „$0 > -2$“, ist also wahr.

c) $P(1)$ bedeutet „$2 > 2$“, ist also falsch.

d) $\exists x P(x)$ ist wahr, da z.B. $P(0)$ wahr ist.

e) $\forall x P(x)$ ist falsch, da z.B. $P(1)$ nicht wahr ist.

f) $\exists x \neg P(x)$ ist wahr, z.B. ist $P(x)$ für $x = 1$ falsch, so daß $\neg P(1)$ wahr ist.

g) $\forall x \neg P(x)$ ist falsch, z.B. ist $P(0)$ wahr, also $\neg P(0)$ falsch.

h) $\neg\forall x P(x)$ ist wahr, weil $\forall x P(x)$ falsch ist.

Aufgabe 6.
Das Prädikat $P(x, y)$ stehe für „Student/Studentin x hat die Vorlesung y besucht“. Die Grundmenge zu x seien alle Studierenden und die Grundmenge zu y seien alle Vorlesungen des Fachbereichs MNI. Schreiben Sie die folgenden Aussagen als deutsche Sätzen auf.

a) $\exists x \exists y P(x, y)$ b) $\exists x \forall y P(x, y)$ c) $\exists y \forall x P(x, y)$

d) $\forall x \exists y P(x, y)$ e) $\forall y \exists x P(x, y)$ f) $\forall x \forall y P(x, y)$

Lösung: Um einen lesbaren Text zu bekommen verzichten wir auf die Schreibweise Student/Studentin u.s.w. und verwenden durchgehend den Begriff „Student“, der somit als neutral aufzufassen ist. Ferner schreiben wir einfach nur „Vorlesung“ und verweisen nicht mehr auf den Fachbereich MNI.

a) Es gibt einen Studenten, der mindestens eine Vorlesung besucht hat.

b) Es gibt einen Studenten, der alle Vorlesungen besucht hat.

c) Es gibt eine Vorlesung, die von allen Studenten besucht wurde.

d) Jeder Student hat mindestens eine Vorlesung besucht.

e) Jede Vorlesung wurde von mindestens einem Studenten besucht.

f) Jeder Student hat alle Vorlesungen besucht.

Aufgabe 7.
Es sei $P(x, y)$ das Prädikat „x ist ein Teiler von y“. Die Grundmengen für x und für y sei die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist eine Aussage? Welche der Aussagen ist wahr, welche ist falsch?

a) $P(10, y)$ b) $P(x, 100)$ c) $\forall x P(x, y)$ d) $\exists x P(x, 7)$

e) $\forall x \exists y P(x, y)$ f) $P(3, 9)$ g) $P(3, 7)$ h) $\exists x P(x, 9)$

i) $\forall x P(x, 9)$ j) $\exists x \forall y P(x, y)$ k) $\forall x P(x, x)$ l) $\forall y P(1, y)$

Lösung:

	Aussage/keine Aussage	wahr/falsch	Begründung
a)	keine Aussage	—	freie Variable y
b)	keine Aussage	—	freie Variable x
c)	keine Aussage	—	freie Variable y
d)	Aussage	wahr	1 teilt 7 und 7 teilt 7
e)	Aussage	wahr	z.B. jedes x teilt x
f)	Aussage	wahr	3 teilt 9
g)	Aussage	falsch	3 teilt nicht 7
h)	Aussage	wahr	z.B. 1 teilt 9
i)	Aussage	falsch	z.B. 2 teilt nicht 9
j)	Aussage	wahr	1 teilt jede natürliche Zahl
k)	Aussage	wahr	jede Zahl teilt sich selbst
l)	Aussage	wahr	1 teilt jede natürliche Zahl