Relationen: Verkettungen, Wege, Hüllen

Aufgabe 1.
Es bezeichne R die Relation $\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$ und S die Relation $\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$. Geben Sie $S \circ R$ an. Skizzieren Sie die Verknüpfung mit Hilfe gerichteter Graphen. Berechnen Sie die Boolesche Matrix der Relation $S \circ R$ aus den Booleschen Matrizen von S und R.

Lösung: Schreibweise: Zu $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$ ist

$$R_2 \circ R_1 = \{(a,c) | \, (\exists b) \, ((a,b) \in R_1) \wedge ((b,c) \in R_2)\}.$$

Die Relationen R und S sind vorgegeben als

$$\begin{aligned} R &= \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}, \\ S &= \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}. \end{aligned}$$

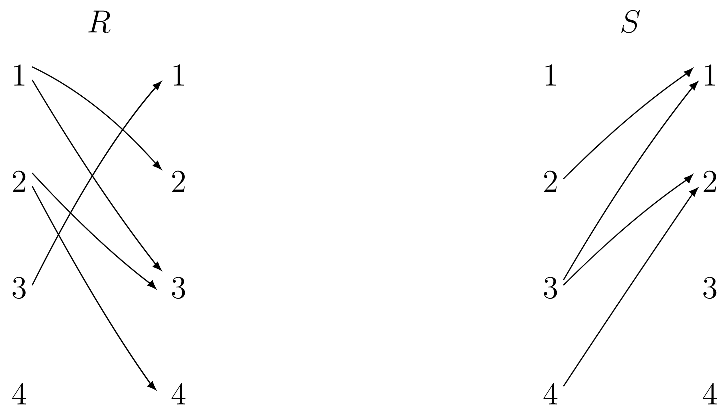
Entsprechend der Definition für die Verknüpfung von Relationen können wir nun feststellen, welche Paare in $S \circ R$ liegen.

$$\begin{aligned} (1,2) \in R \ \wedge \ (2,1) \in S &\Rightarrow (1,1) \in S \circ R \\ (1,3) \in R \ \wedge \ (3,1) \in S &\Rightarrow (1,1) \in S \circ R \\ (1,3) \in R \ \wedge \ (3,2) \in S &\Rightarrow (1,2) \in S \circ R \\ (2,3) \in R \ \wedge \ (3,1) \in S &\Rightarrow (2,1) \in S \circ R \\ (2,3) \in R \ \wedge \ (3,2) \in S &\Rightarrow (2,2) \in S \circ R \\ (2,4) \in R \ \wedge \ (4,2) \in S &\Rightarrow (2,2) \in S \circ R \end{aligned}$$

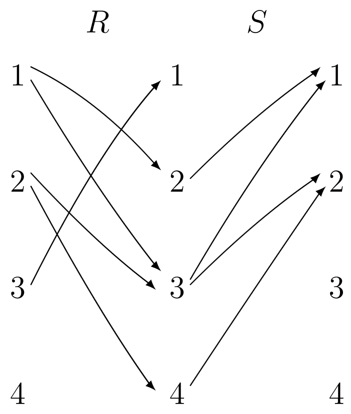
Zwar ist $(3,1) \in R$, aber in S ist kein Paar mit der 1 an der ersten Position, d.h. über $(3,1) \in R$ wird kein Beitrag zu $S \circ R$ geliefert. Insgesamt habe wir damit

$$S \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}.$$

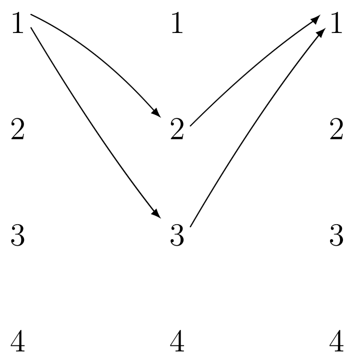
Die Verknüpfung von R und S läßt sich anschaulich sehr schön darstellen, wenn man R und S nicht wie üblich zeichnet, sondern die Ecken zweimal nebeneinander auflistet.



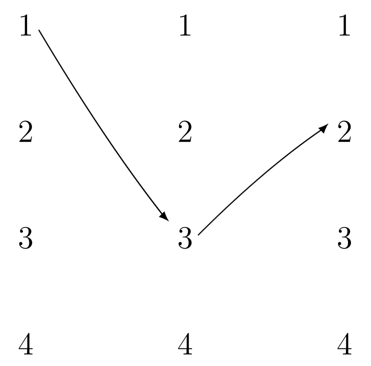
Werden jetzt die Endpunkte von R und die Anfangspunkte von S zusammengelegt, so besteht $S \circ R$ aus allen Paaren, für die es mindestens einen Weg von links nach rechts über ein „verbindendes" Element in der Mitte gibt.



Zum Beispiel sieht man auf zwei Arten, daß $(1, 1)$ in $S \circ R$ liegt:



Ferner gehört zum Beispiel das Paar $(1, 2)$ wegen des folgenden Weges zu $S \circ R$:



Um die Boolesche Matrix der Relation $S \circ R$ aus den Booleschen Matrizen von R und S berechnen zu können, schreiben wir diese Matrizen zunächst auf.

R	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0

S	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	1	0	0
4	0	1	0	0

Die Boolesche Matrix der Relation $S \circ R$ wird mit einer abgeänderten Matrizenmultiplikation berechnet, bei der „$\vee$“ (das logische Oder) anstelle von „$+$“ verwendet wird, und „$\wedge$“ (das logische Und) anstelle von „ $\cdot$ “.

Wir schreiben die Multiplikation in einem Rechenschema auf:

$$
\begin{array}{c|c}
 & S \\
\hline
R & S \circ R
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Zum Beispiel entsteht das Element in der zweiten Zeile und der ersten Spalte durch

$$(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1.$$

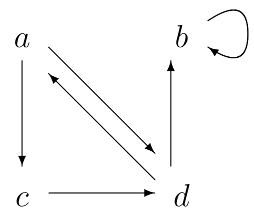
Im folgenden Schema werden diejenigen Elemente der Booleschen Matrizen dargestellt, die an dieser Berechnung beteiligt sind.

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & & & & 0 \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 0 \\
\hline
 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & \\
 & & & &
\end{array}
$$

Aufgabe 2.
Es sei die Relation $R = \{(a,c),(a,d),(b,b),(c,d),(d,a),(d,b)\}$ auf der Menge $M = \{a,b,c,d\}$ gegeben. Zeichnen Sie den gerichteten Graphen von R, und bestimmen Sie mit dessen Hilfe die Relationen R^2 und R^3.

Lösung: Es gibt zwei Möglichkeiten, die Relation graphisch zu veranschaulichen.

- 1. Darstellung



Der gerichtete Graph mit den Ecken a, b, c und d und den gerichteten Kanten entsprechend der Relation wird gezeichnet. Man erhält R^2 und R^3 durch

$$\begin{array}{lcl} R^2 & = & \{(x,y) \,|\, \text{es existiert ein Weg der Länge 2 von } x \text{ nach } y\}, \\ R^3 & : & \text{analog mit Länge 3.} \end{array}$$

Konkret kann man zum Beispiel systematisch durchprobieren, ob (a,a) in R^2 ist, (a,b) in R^2 ist, (a,c) in R^2 ist, u.s.w., wobei Tabellen praktisch sind.

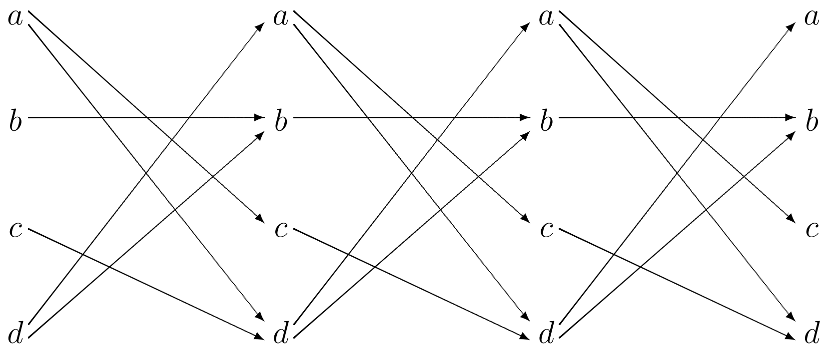
	in R^2	in R^3
(a,a)	ja	ja
(a,b)	ja	ja
(a,c)	nein	ja
(a,d)	ja	ja

	in R^2	in R^3
(b,a)	nein	nein
(b,b)	ja	ja
(b,c)	nein	nein
(b,d)	nein	nein

	in R^2	in R^3
(c,a)	ja	nein
(c,b)	ja	ja
(c,c)	nein	ja
(c,d)	nein	ja

	in R^2	in R^3
(d,a)	nein	ja
(d,b)	ja	ja
(d,c)	ja	nein
(d,d)	ja	ja

- 2. Darstellung

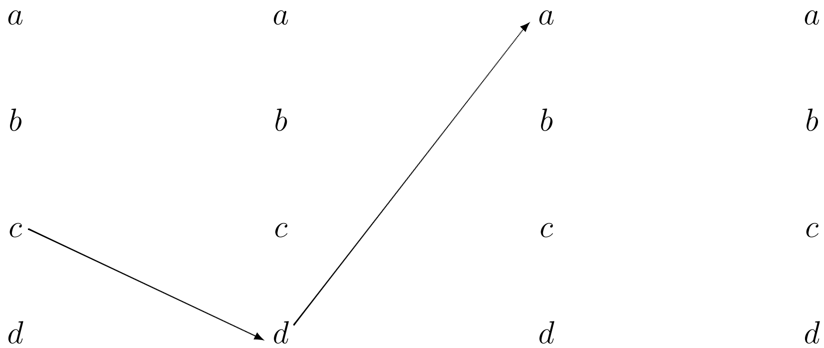


Die Spalte mit den Ecken a, b, c und d wird viermal nebeneinander geschrieben. Von einer Spalte zur nächsten werden gerichtete Kanten entsprechend der Relation gezeichnet. Hier bekommt man R^2 und R^3 durch

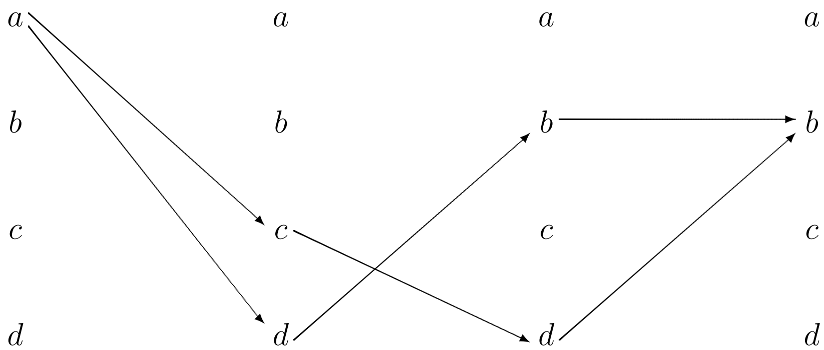
R^2 : besteht aus allen Paaren (x, y), für die ein Weg der Länge 2 von dem Element x in der linken Spalte zu dem Element y zwei Spalten weiter existiert;

R^3 : besteht aus allen Paaren (x, y), für die ein Weg der Länge 3 von x in der linken Spalte zu y in der rechten Spalte existiert.

Diese Darstellung ist zwar aufwendiger als die erste, aber die Wege sind leicht zu erkennen. Im folgenden ist zum Beispiel ein Weg der Länge 2 von c nach a herausgestellt, der zeigt, daß $(c, a) \in R^2$ gilt.



Im folgenden sehen wir, daß es zwei Wege der Länge 3 von a nach b gibt. Also gilt $(a, b) \in R^3$. (Selbstverständlich hätte schon ein Weg genügt.)



Insgesamt kann man also unmittelbar ablesen, daß sich

$$R^2 = \{(a,a), (a,b), (a,d), (b,b), (c,a), (c,b), (d,b), (d,c), (d,d)\}$$

und

$$R^3 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (c,b), (c,c), (c,d), (d,a), (d,b), (d,d)\}$$

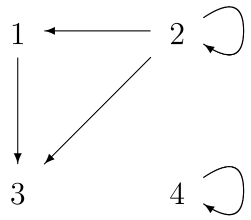
für die gesuchten Relationen ergibt.

Aufgabe 3.
Es sei R die Relation $\{(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(4,4)\}$ auf der Menge $\{1,2,3,4\}$. Geben Sie R^{-1} an. Schreiben Sie zu R und R^{-1} die Booleschen Matrizen auf, und zeichnen Sie die gerichteten Graphen.

Lösung:

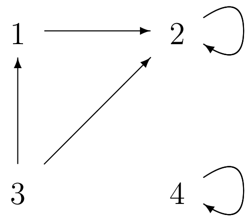
- $R = \{(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(4,4)\}$

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	1	1	1	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	1



- $R^{-1} = \{(3,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,4)\} = \{(1,2),(2,2),(3,1),(3,2),(4,4)\}$

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	1	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	0	1



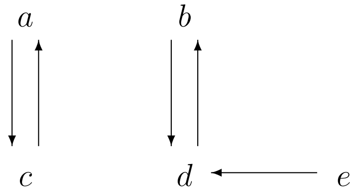
Matrix: Spiegelung an der Hauptdiagonalen.
Graph: Richtungen der Pfeile umdrehen.

Aufgabe 4.
Bestimmen Sie zu den folgenden Relationen auf der Menge $\{a,b,c,d,e\}$ die reflexive, die symmetrische und die transitive Hülle. Zeichnen Sie zu jeder Relation den gerichteten Graphen.

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\}\\
R_2 &= \{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\}\\
R_3 &= \{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}
\end{aligned}$$

Lösung:

1. $R_1 = \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\}$



- reflexive Hülle: $R_1 \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$
- symmetrische Hülle: $R_1 \cup \{(d,e)\}$
- transitive Hülle: $R_1 \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,b)\}$

2. $R_2 = \{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\}$

$$\begin{tikzcd}
a & b \arrow[r] \arrow[d, shift right] & c \arrow[dl, shift right] \\
d \arrow[u] & e \arrow[u, shift right] \arrow[ur, shift right]
\end{tikzcd}$$

- reflexive Hülle: $R_2 \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$
- symmetrische Hülle: $R_2 \cup \{(a,d),(c,b)\}$
- transitive Hülle: $R_2 \cup \{(b,b),(c,b),(c,c),(e,e)\}$

3. $R_3 = \{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}$

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r] & a \arrow[r, shift left] \arrow[dl] \arrow[d, shift right] & b \arrow[l, shift left] \arrow[dl, shift right] \\
e \arrow[u] & c \arrow[u, shift right] \arrow[ur, shift right]
\end{tikzcd}$$

- reflexive Hülle: $R_3 \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$
- symmetrische Hülle: $R_3 \cup \{(a,d),(d,e),(e,a)\}$
- transitive Hülle: $\{a,b,c,d,e\} \times \{a,b,c,d,e\}$, d.h. die transitive Hülle besteht aus allen Paaren, die überhaupt möglich sind.

Zur Bestimmung der transitiven Hülle ist ein Satz aus der Vorlesung hilfreich: Das Paar (x,y) liegt in der transitiven Hülle von R, wenn es in R einen Weg von x nach y gibt.