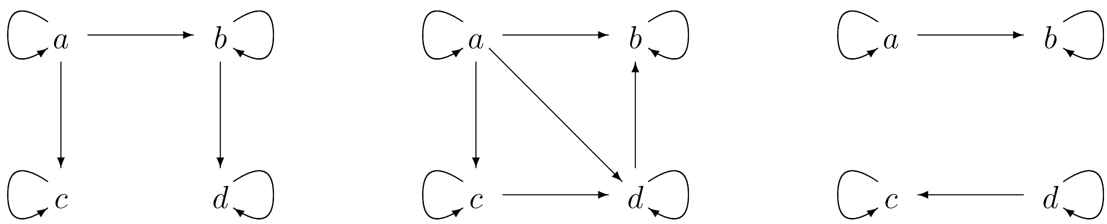
Relationen: Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Relationen auf der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ sind Äquivalenzrelationen? Welches sind in diesen Fällen die Äquivalenzklassen?

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\} \\
R_2 &= \{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\} \\
R_3 &= \{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\} \\
R_4 &= \{(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \\
R_5 &= \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.
Gesucht ist die kleinste Äquivalenzrelation auf der Menge $\{a, b, c, d, e\}$, die die Relation $\{(a, b), (a, c), (d, e)\}$ enthält.

Aufgabe 3.
Im folgenden sind drei Relationen durch ihre gerichteten Graphen gegeben. Stellen Sie fest, ob es sich um Ordnungen handelt. Sind diese partiell oder total?



Aufgabe 4.
Auf jeder der folgenden Mengen ist durch die Teilbarkeitsrelation eine partielle Ordnung gegeben. Zeichnen Sie die zugehörigen Hasse-Diagramme.

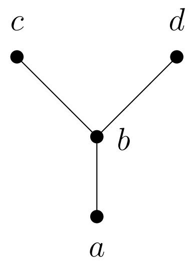
(a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

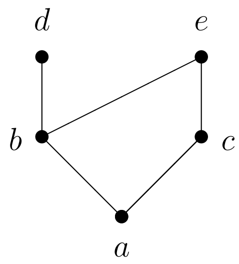
(b) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

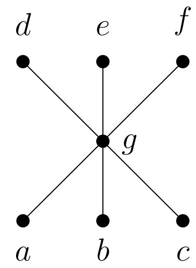
(c) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$

(d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

Aufgabe 5.
Zu den folgenden Hasse-Diagrammen sollen die zugehörigen partiellen Ordnungen als Mengen von geordneten Paaren angegeben werden.







Aufgabe 6.
Auf der Menge $\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$ ist durch die Teilbarkeitsrelation eine partielle Ordnung gegeben. Finden Sie eine dazu kompatible totale Ordnung.

Aufgabe 7.
Es sei $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $R \subseteq A \times A$, d.h. R sei eine Relation auf der Menge der geordneten Paare von positiven ganzen Zahlen. Dabei sei $((a, b), (c, d)) \in R$ genau dann, wenn $ad = bc$ ist.

Zeigen Sie, daß R eine Äquivalenzrelation ist. Welche Elemente sind in der Äquivalenzklasse $[(1, 2)]$ enthalten? Wie kann man die Äquivalenzklassen von R interpretieren?