

Mengenlehre

Grundlegende Begriffe und Rechenregeln

- Definition (Menge)

Unter einer **Menge** M verstehen wir eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.

- Schreibweisen:

$a \in M$ steht für „ a ist Element der Menge M “.

$a \notin M$ bedeutet „ a ist nicht Element der Menge M “.

- Beispiele: Menge der natürlichen Zahlen, Menge der ganzen Zahlen u.s.w.

- Schreibweisen zur Charakterisierung von Mengen.

1. Aufzählende Darstellung, z.B. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. Beschreibende Darstellung: Es sei $P(x)$ ein Prädikat und M eine Menge. Dann sei

$$\{x \in M \mid P(x)\}$$

die Menge aller Elemente von M , die für x in $P(x)$ eingesetzt, $P(x)$ zu einer wahren Aussage machen.

$$a \in \{x \in M \mid P(x)\} \Leftrightarrow (a \in M \text{ und } P(a) \text{ ist wahr.})$$

- Definition

Es seien A und B Mengen.

1. A heißt **Teilmenge** von B , wenn aus $x \in A$ stets $x \in B$ folgt.

Schreibweise: $A \subseteq B$.

2. Wir schreiben $A = B$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt. Sonst: $A \neq B$.

3. A heißt genau dann eine echte Teilmenge von B , wenn $A \subseteq B$ und $A \neq B$ ist.

Schreibweise: $A \subset B$.

4. Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt die **leere Menge**.

Schreibweise: \emptyset .

Festsetzung: \emptyset ist Teilmenge jeder Menge.

5. **Durchschnitt** von A und B :

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

6. **Vereinigung** von A mit B :

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

7. **Differenzmenge** A ohne B :

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

8. Es sei B eine Teilmenge von A , also $B \subseteq A$. Das **Komplement** von B in A ist:

$$\mathcal{C}_A(B) = \overline{B}_A = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \setminus B.$$

9. Ist $A \cap B = \emptyset$, so heißen A und B *disjunkt* oder *elementfremd*.

10. Die Menge aller Teilmengen von A heißt die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ von A .

- Satz (Rechenregeln für die Verknüpfung von Mengen)

Es seien A , B und C Mengen.

1. **Kommutativität** bei Durchschnitt und Vereinigung

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

2. **Assoziativität** bei Durchschnitt und Vereinigung

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. **Distributivität**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. **Regeln von de Morgan** bei dem Komplement eines Durchschnitts bzw. einer Vereinigung

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Das Komplement soll dabei bezüglich einer gemeinsamen Obermenge von A und B gebildet werden.

- Beweis der Regeln durch Rückführung auf entsprechende Gesetze der Aussagenlogik.
- Anmerkung: Die Schreibweise bei der Vereinigung von n Mengen A_1, A_2, \dots, A_n ist

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i,$$

bzw. beim Durchschnitt

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Diese Darstellungen sind wegen der Assoziativität von Vereinigung und Durchschnitt zulässig.

- Definition

Eine Menge heißt *endlich*, wenn sie nur endlich viele Elemente enthält.

Ist die Menge A endlich, so bezeichne $|A|$ die Anzahl der Elemente von A . Man nennt $|A|$ die **Mächtigkeit** (oder die *Kardinalität*) der Menge A .

Ist M nicht endlich, schreibt man $|A| = \infty$.

- Anmerkung: Es sei $A \subseteq B$. Ist B endlich, so ist A endlich. Ist A unendlich, so ist B unendlich.
- Beispiel:

P = Menge der Primzahlen, Z = Menge der Primzahlzwillinge. Es ist $Z \subset P$ und $|P| = \infty$. Aber $|Z| = ?$

- Satz

Es seien A und B endliche Mengen. Es gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- Definition

Es seien A und B Mengen. Wir setzen

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Dabei sei

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ und } b = b'.$$

Die Symbole (a, b) heißen die *geordneten Paare* von Elementen aus A und B .

$A \times B$ heißt das **kartesische Produkt** von A mit B .

Ist $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$, so sei $A \times B = \emptyset$.

Wir schreiben $A \times A = A^2$ und entsprechend $A^1 = A$.

- Beispiel
- Veranschaulichung in der Zeichenebene.
- Definition

Das kartesische Produkt von n Mengen A_1, \dots, A_n sei

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}.$$

Dabei sei

$$(a_1, \dots, a_n) = (a'_1, \dots, a'_n) \Leftrightarrow a_i = a'_i \text{ für alle } i.$$

Die (a_1, \dots, a_n) heißen **n-Tupel**.

Schreibweise bei n übereinstimmenden Mengen: $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-mal}}$.

- Anmerkung: Der von uns verwendete (sogenannte „naive“ Mengenbegriff) kann zu Schwierigkeiten führen. Augenfällig macht dies die **Russellsche Antinomie** (Russellsches Paradoxon).

Wir bilden eine Menge R aus allen Mengen M , die sich nicht selbst enthalten, für die also $M \notin M$ gilt. Es sei somit

$$R = \{M \mid M \notin M\}.$$

Jetzt kann man fragen, ob auch $R \notin R$ gilt, oder ob $R \in R$ ist. Aber *beide* Annahmen führen auf einen Widerspruch! (Wir erhalten $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$.)

Um den Widerspruch zu vermeiden, muß man den Mengenbegriff abändern; es wird nicht mehr erlaubt, beliebige Mengen entsprechend unserer „naiven“ Definition zu bilden.