

## Mengenlehre

Ein kurzer Überblick über Zahlenmengen, Begriff der Primzahlen

- Wir verwenden spezielle Symbole für die wichtigsten Mengen von Zahlen.
  - *natürliche Zahlen* :  $\mathbb{N}$
  - *ganze Zahlen* :  $\mathbb{Z}$
  - *rationale Zahlen* :  $\mathbb{Q}$
  - *reelle Zahlen* :  $\mathbb{R}$
  - *komplexe Zahlen* :  $\mathbb{C}$

Hierbei sei  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Wollen wir die Null dazunehmen, schreiben wir  $\mathbb{N}_0$ , also  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Es gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Insbesondere gibt es Zahlen, die nicht als Brüche darstellbar sind.

- Satz

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

- Anmerkung: Reelle Zahlen, die nicht rational sind, werden irrationale Zahlen genannt. Also sagt der Satz, daß  $\sqrt{2}$  irrational ist.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

- Hilfssatz

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:

$$n^2 \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad n \text{ gerade.}$$

- Sowohl Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen als auch Dezimalzahlen mit unendlich vielen periodischen Nachkommastellen lassen sich als Brüche schreiben.

Irrationale Zahlen hingegen haben unendlich viele nicht-periodische Nachkommastellen.

- Beispiele für irrationale Zahlen.
- Beispiele für das Umrechnen von Dezimalzahlen in Brüche, speziell auch bei unendlich vielen periodischen Nachkommastellen.

- Problemstellung: Die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$  hat keine reelle Lösung. Skizze.
- Idee: Einführung „neuer Zahlen“; Erweiterung von  $\mathbb{R}$  (ähnlich: Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$ ).

- Definition

Das Symbol  $i$  sei eine „Zahl“ mit  $i^2 = -1$ . Wir nennen  $i$  die **imaginäre Einheit**.

- Anmerkung: Das Rechnen mit  $i$  „wie im Reellen“ unter Berücksichtigung von  $i^2 = -1$  führt zu sinnvollen Anwendungen. Vielfache von  $i$  sind dann z.B.  $2i$ ,  $\frac{5}{2}i$  und  $(-\frac{7}{3})i$ . Wird noch eine reelle Zahl addiert, entstehen Ausdrücke wie z.B.  $6 + 2i$  oder  $5 - \frac{7}{3}i$ . Ferner ist  $2i = i2$  und  $6 + 2i = 2i + 6$  u.s.w.

- Definition

Zahlen der Gestalt  $bi$  mit  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  heißen (**rein**) **imaginäre Zahlen**.

Zahlen der Form  $a+bi$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  heißen **komplexe Zahlen**. Wir bezeichnen

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$$

als **Menge der komplexen Zahlen**.

Zu  $z = a + bi$  heißt  $a = \operatorname{Re}(z)$  der **Realteil** von  $z$  und  $b = \operatorname{Im}(z)$  der **Imaginärteil** von  $z$ .

- Darstellung der komplexen Zahlen in der **komplexen Ebene** (Gaußschen Ebene).
- Anmerkung: Es gilt

$$\begin{aligned} a + bi = c + di &\Leftrightarrow a = c \text{ und } b = d, \\ a + bi = 0 &\Leftrightarrow a = 0 \text{ und } b = 0, \\ a + bi \neq 0 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 \neq 0. \end{aligned}$$

- Rechenregeln (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division).

- Definition

Eine **Primzahl** ist eine ganze Zahl größer als 1, die keine positiven Teiler außer 1 und sich selbst hat. (D.h. es ist eine Zahl  $p > 1$  mit exakt zwei positiven Teilern: 1 und  $p$ .)

- Auflistung aller Primzahlen bis zu einer vorgegebenen Zahl  $n$  mit dem Sieb des Eratosthenes.

- Satz

Jede ganze Zahl größer als 1 ist ein Produkt aus Primzahlen.

- **Primfaktorzerlegung** einer ganzen Zahl  $n > 1$  an Beispielen.

- Satz

Es gibt unendlich viele Primzahlen. (Gleichwertig: Es gibt keine größte Primzahl.)

- Anmerkung: Manchmal wird das Symbol  $\mathbb{P}$  für die Menge der Primzahlen verwendet. Die Menge  $\mathbb{P}$  hat also unendliche Mächtigkeit,  $|\mathbb{P}| = \infty$ .

- Satz

Die Primfaktorzerlegung ist eindeutig. D.h. zu jeder ganzen Zahl  $n > 1$  gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_l^{a_l}$$

mit Primzahlen  $p_1 < p_2 < \dots < p_l$  und Exponenten  $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{N}$ .