

Funktionen Grundbegriffe

- Definition (Funktion)

Es seien A und B Mengen. Eine **Funktion** (oder *Abbildung*) f von A nach B ,

$$f : A \rightarrow B$$

ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet. Schreibweise:

$$x \mapsto y \quad \text{oder} \quad y = f(x).$$

Dabei heißt x die *unabhängige* und y die *abhängige* Variable.

Die Menge A heißt **Definitionsbereich** (oder *Definitionsmenge*) von f , geschrieben $D(f)$. Die Menge $\{y \mid y = f(x), x \in A\} \subseteq B$ heißt **Wertebereich** (oder *Wertemenge, Bildmenge*) von f , kurz $W(f)$. Die Menge B wird **Zielmenge** genannt.

- Anmerkung: Wegen der Eindeutigkeit einer Funktion kann nicht gleichzeitig $x \mapsto y_1$ und $x \mapsto y_2$ gelten. Hingegen ist $f(x_1) = f(x_2)$ erlaubt. (Skizzen!)
- Beispiele:
 - Abbildung von sechsstelligen Zahlen (Matrikelnummern) auf Zeichenketten (Namen).
 - Abbildung von Programmeingabe auf Programmausgabe.
 - Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{R} durch $x \mapsto 0,5x + 1$.

- Definition (Graph)

Der **Graph** einer Funktion $f : A \rightarrow B$ ist die Menge der geordneten Paare $\{(x, y) \mid x \in A \text{ und } f(x) = y\}$.

- Beispiel: Die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ und $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x^2$.
- Anmerkung: Der Graph einer Funktion $f : A \rightarrow B$ ist eine spezielle Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times B$. Charakteristisch für den Funktionsbegriff ist, daß es zu jedem $x \in A$ genau ein Paar $(x, y) \in A \times B$ mit x als erstem Element gibt. Dies kann man für eine alternative Definition des Funktionsbegriffs nutzen; dabei unterscheidet man nicht mehr zwischen „Abbildung“ und „Graph“.

Es seien A und B Mengen. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ ist eine Teilmenge G von $A \times B$ mit der Eigenschaft: zu jedem $x \in A$ existiert genau ein $y \in B$ derart, daß $(x, y) \in G$ ist. Wir schreiben $y = f(x)$.

- Definition

Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion.

1. f heißt **injektiv** (*eineindeutig, umkehrbar*), wenn aus $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$ folgt (gleichwertig: wenn aus $f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_1, x_2 \in A$ stets $x_1 = x_2$ folgt).
2. f heißt **surjektiv**, falls $W(f) = B$.
3. f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

- Beispiele mit endlichen und unendlichen Definitionsbereichen und Wertebereichen. Graphische Veranschaulichung.

- Satz

Es seien A und B *endliche* Mengen mit $|A| = |B|$, und es sei f eine Abbildung $f : A \rightarrow B$. Dann sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

1. f ist injektiv,
2. f ist surjektiv,
3. f ist bijektiv.

- Definition (Umkehrfunktion)

Die Funktion $f : A \rightarrow B$ sei injektiv. Wir ordnen jedem $b \in W(f)$ das eindeutig existierende Element $a \in A$ zu, für das $f(a) = b$ gilt, und nennen diese Funktion die **Umkehrfunktion** von f , geschrieben f^{-1} .

Also ist $f^{-1} : W(f) \rightarrow A$, und es ist $f^{-1}(b) = a$, wenn $f(a) = b$ gilt.

- Beispiele

- Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \rightarrow B$, also eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, wir schreiben $y = f(x)$. Die Umkehrfunktion kann graphisch und rechnerisch bestimmt werden.

- Graphisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten des x - y -Koordinatensystems.
- Rechnerisch: $y = f(x)$ nach x auflösen (falls möglich); dann x und y vertauschen.

- Beispiel

- Definition (Eigenschaften von Funktionen)

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ und $f : A \rightarrow B$, also eine reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen, wir schreiben $y = f(x)$.

Die Funktion f heißt

gerade $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

ungerade $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

monoton wachsend $\Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

streng monoton wachsend $\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

monoton fallend $\Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

streng monoton fallend $\Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$ für $x_2 > x_1$ mit $x_1, x_2 \in D(f)$;

(streng) monoton $\Leftrightarrow f$ (streng) monoton wachsend oder fallend;

periodisch \Leftrightarrow existiert ein $p > 0$ mit $f(x + p) = f(x)$ für alle $x \in D(f)$;

beschränkt \Leftrightarrow existiert ein $k > 0$ mit $|f(x)| \leq k$ für alle $x \in D(f)$.

- Veranschaulichungen und Beispiele.
- Beispiele: Wir betrachten die Graphen
 - der Potenzfunktionen $y = x^2$, $y = x^3$ und $y = x^4$,
 - der Wurzelfunktionen $y = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt[3]{x}$,
 - der Winkelfunktionen $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$.

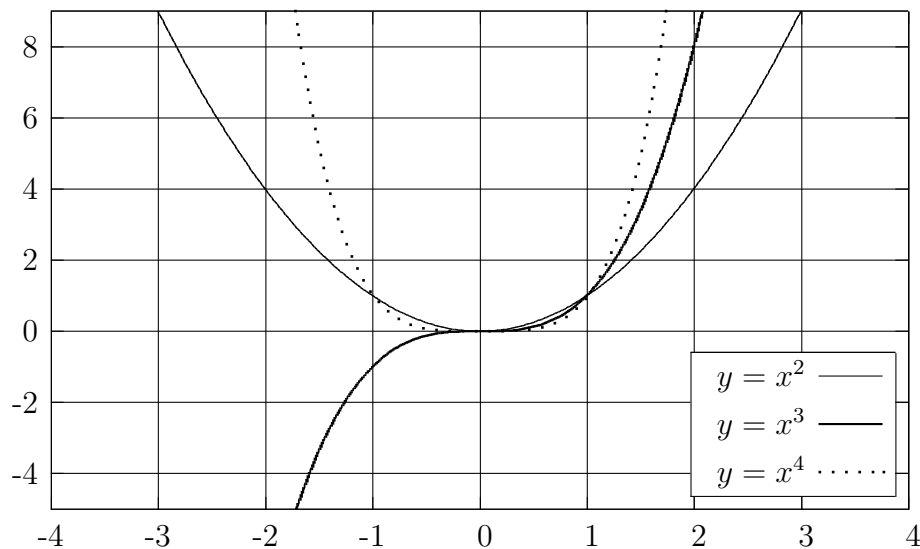


Abbildung 1: Potenzfunktionen

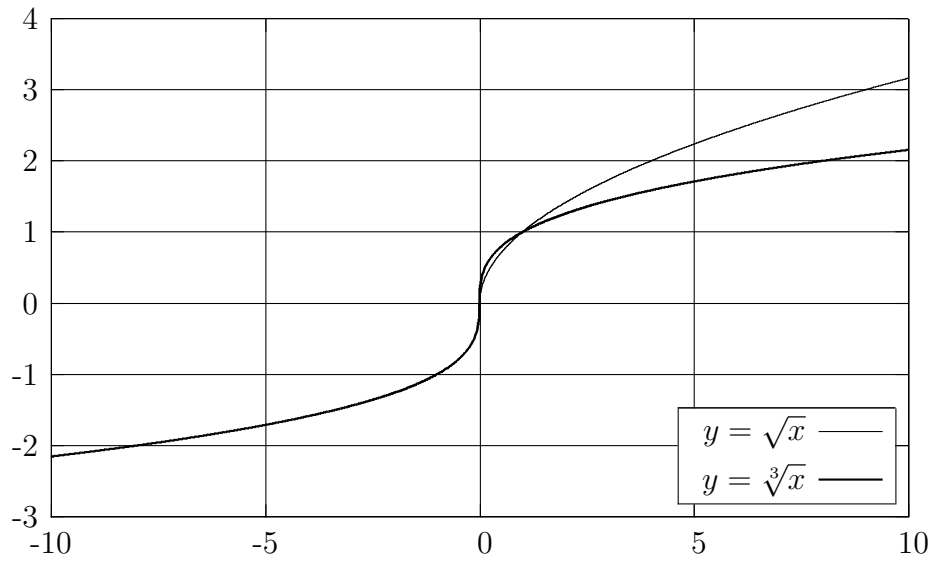


Abbildung 2: Wurzelfunktionen

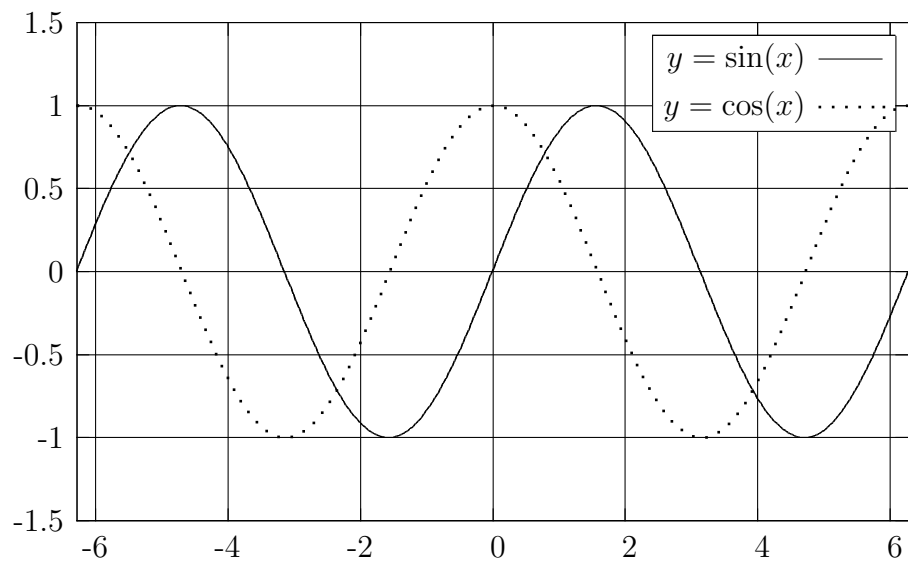


Abbildung 3: Winkelfunktionen