

# Funktionen

## Folgen und Reihen

- Definition

Wird jedem  $n \in \mathbb{N}$  eine Zahl  $a_n$  zugeordnet, so entsteht eine **unendliche Zahlenfolge**

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Schreibweise:  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  oder kurz  $(a_n)$ .

Die Zahlen  $a_n$  heißen **Glieder** der Folge.

- Anmerkung:

1. Die Indizierung darf statt mit 1 auch mit jeder anderen ganzen Zahl beginnen.
2. Eine Folge kann als Funktion  $f$  mit

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = a_n$$

aufgefaßt werden.

3. Die Vorschrift  $a_n = f(n)$  heißt **Bildungsgesetz** der Folge.
4. Eine **endliche** Folge

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$$

wird entsprechend geschrieben:  $(a_n)_{n=1}^m$ .

5. Da eine endliche Folge  $(a_n)_{n=1}^m$  nichts anderes als ein  $m$ -Tupel ist, verwendet man auch dieselbe Schreibweise wie bei Paaren  $(x, y)$  oder Tripeln  $(x, y, z)$  und setzt die Liste der Elemente in Klammern, schreibt also

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_m)$$

oder auch

$$(a_1, a_2, a_3, \dots)$$

im Falle von unendlichen Folgen.

- Beispiele: arithmetische Folge, geometrische Folge.
- Anmerkung: Folgen können **rekursiv** definiert werden.
- Beispiele: Potenz, Fakultät, Fibonacci-Folge.

- Wenn eine Zahlenfolge  $(a_n)$  sich für immer größere Indexwerte  $n$  „immer mehr einem Zahlenwert  $g$  annähert“, dann nennen wir die Folge *konvergent*. Wir bezeichnen  $g$  dann als *Grenzwert* der Folge und sagen, daß die Folge gegen den Grenzwert *konvergiert*. (Diese anschauliche Vorstellung reicht für unsere Zwecke aus. Für die exakte Definition sei auf die Literatur verwiesen.)
- Beispiel: Die irrationale Zahl  $e = 2,71\dots$  ist der Grenzwert der unendlichen Folge, die aus den Zahlen

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

besteht. Ein anschaulicher Begriff der Konvergenz entsteht, wenn man die folgende Tabelle betrachtet, die einige Werte von  $a_n$  für wachsendes  $n$  enthält. (Die letzten Stellen sind gerundet.)

$n$	$a_n$	$n$	$a_n$	$n$	$a_n$	$n$	$a_n$
1	2.000000	10	2.593742	100	2.704814	1000	2.716924
2	2.250000	20	2.653298	200	2.711517	2000	2.717603
3	2.370370	30	2.674319	300	2.713765	3000	2.717829
4	2.441406	40	2.685064	400	2.714892	4000	2.717942
5	2.488320	50	2.691588	500	2.715569	5000	2.718010
6	2.521626	60	2.695970	600	2.716020	6000	2.718055
7	2.546500	70	2.699116	700	2.716343	7000	2.718088
8	2.565785	80	2.701485	800	2.716585	8000	2.718112
9	2.581175	90	2.703332	900	2.716773	9000	2.718131
10	2.593742	100	2.704814	1000	2.716924	10000	2.718146

Die exakten ersten sechs Nachkommastellen sind  $e \approx 2,718281$  (ohne Rundung der letzten Stelle).

- Die endliche Summe  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$  wird auch als

$$\sum_{n=1}^k a_n$$

geschrieben. Bei systematisch aufgebauten Summanden  $a_n$  kann es Formeln zur Berechnung des Summenwertes geben. Ein bekanntes Beispiel geht auf Gauß zurück.

- Satz (Gaußsche Summenformel)

Es gilt:

$$\sum_{n=1}^k n = \frac{k(k+1)}{2}.$$

- Geht man — anschaulich gesprochen — von einer endlichen Summe zu einer unendlichen Summe über, so erhält man eine Reihe.

- Definition

Ist  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  eine Folge, so heißt der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

eine **Reihe**. Die  $a_n$  heißen die **Glieder** der Reihe.

- Anmerkung: Die Ausführung unendlich vieler Additionen ist nicht möglich. Wir betrachten deshalb die Folge  $(s_m)$  der endlichen **Partialsommen**

$$s_m = \sum_{n=1}^m a_n.$$

Wenn die Folge  $(s_m)$  gegen den Wert  $s$  konvergiert, heißt die Reihe *konvergent* zur Summe  $s$ . Schreibweise:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ .

Die Reihe heißt *divergent*, wenn die Folge  $(s_m)$  keinen endlichen Grenzwert besitzt.

- Beispiele: harmonische Reihe, geometrische Reihe.

- Satz

Die geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  ist für  $|q| < 1$  konvergent und für  $|q| \geq 1$  divergent. Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

- Beweis

- Anmerkung: Der Beweis liefert auch eine Formel für die Berechnung endlicher geometrischer Reihen.

- Satz

Es gilt

$$\sum_{n=0}^m q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

für beliebige Werte von  $q$ .

- Beispiele für nicht-geometrische Reihen, die gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren, sind im folgenden (ohne Herleitung) aufgelistet.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - + \dots = \ln 2$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Diese Reihen haben eine erhebliche theoretische Bedeutung, werden aber nicht für die praktische Berechnung von  $\pi$  verwendet, da die Konvergenz sehr langsam ist.

- Eine Reihe, die sehr schnell konvergiert, ist

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Ferner wird die sogenannte  $e$ -Funktion  $f(x) = e^x$  durch die Reihe

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

dargestellt. Wegen der sehr schnellen Konvergenz findet diese Formel in Softwarepaketen praktische Anwendung.

Die folgende Tabelle enthält einige Werte der Partialsumme  $s_m = \sum_{n=0}^m 1/n!$ .

$m$	$s_m$	$m$	$s_m$
0	1.0000000000000000	8	2.718278769841270
1	2.0000000000000000	9	2.718281525573192
2	2.5000000000000000	10	2.718281801146385
3	2.6666666666666667	11	2.718281826198493
4	2.7083333333333333	12	2.718281828286169
5	2.7166666666666666	13	2.718281828446759
6	2.7180555555555555	14	2.718281828458230
7	2.718253968253968	15	2.718281828458995

Ein Vergleich der Werte dieser Tabelle mit den Werten in der Tabelle von  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  zeigt den Unterschied der Konvergenzgeschwindigkeiten.