Funktionen

Einige elementare Funktionen

- Definition

  Eine Funktion der Gestalt

  $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

  mit $n \in \mathbb{N}$ heißt ***Polynom* $\mathbf{n}$*-ten Grades*** oder ***ganzrationale Funktion***. Die ***Koeffizienten*** $a_0, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) können reell oder komplex sein.

- Anmerkung: Spezialfälle sind die konstante, lineare, quadratische und kubische Funktion, sowie allgemein die Potenzfunktion $y = x^n$ mit natürlichem Exponenten n.

  Der Graph eines linearen Polynoms mit reellen Koeffizienten ist eine Gerade, der Graph eines quadratischen Polynoms mit reellen Koeffizienten ist eine Parabel $y = ax^2 + bx + c$.

  Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Wenn die Parabel keine Schnittpunkte mit der x-Achse hat, erhält man beim Lösen der quadratischen Gleichung eine Wurzel aus einer negativen Zahl, d.h. komplexe Lösungen.

- Definition

  Der Quotient zweier Polynome

  $$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m}$$

  heißt ***gebrochenrationale Funktion***. Der Definitionsbereich ist

  $$D(r) = \{x \mid b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \neq 0\}.$$

  Für $m > n$ ist die Funktion *echt* gebrochenrational, für $m \leq n$ *unecht* gebrochenrational.

- Definition

  Funktionen $f(x) = x^a$ mit konstantem Exponenten a und variabler Basis x heißen ***Potenzfunktionen***. Im allgemeinen Fall, also für beliebige reelle Exponenten a, sind sie für positive x definiert.

- Anmerkung: In wichtigen Fällen erweitert sich der Definitionsbereich. Dazu seien nur Zahlen aus bestimmten Teilmengen von $\mathbb{R}$ für die Exponenten zugelassen.

  - Natürliche Zahlen: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Definitionbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.
  - Negative ganze Zahlen: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Definitionbereich ist $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
  - Ist $n > 0$ *gerade*, sind die Funktionen $y = x^n$ für $x \geq 0$ streng monoton, also auf dem Intervall $[0, \infty)$ umkehrbar. Die Umkehrfunktionen sind die ***Wurzelfunktionen*** $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und n gerade. Definitionbereich ist $D(f) = [0, \infty)$.
  - Ist $n > 0$ *ungerade*, sind die Funktionen $y = x^n$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton und somit umkehrbar. Umkehrfunktionen sind die ***Wurzelfunktionen*** $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und n ungerade. Definitionbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.

- Anmerkung: Man beachte die Rechenregeln für Potenzen. Für x, x_1, $x_2 > 0$ und a, $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} x^a \cdot x^b &= x^{a+b} \\ \frac{x^a}{x^b} &= x^{a-b} \\ (x^a)^b &= x^{ab} = (x^b)^a \\ x_1^a \cdot x_2^a &= (x_1 \cdot x_2)^a \end{aligned}$$

  Speziell mit m, $n \in \mathbb{N}$ gilt für Wurzeln

$$\begin{aligned} x^{m/n} &= \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \\ \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2} &= \sqrt[n]{x_1} \cdot \sqrt[n]{x_2} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} &= \sqrt[mn]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \end{aligned}$$

- Definition

  Funktionen vom Typ $f(x) = b^x$ mit konstanter Basis $b > 0$ und $b \neq 1$ heißen ***Exponentialfunktionen***. Der Exponent x ist variabel und darf beliebige reelle Werte annehmen, d.h. der Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$.

  Von besonderer Bedeutung ist die Exponentialfunktion mit der Basis e, die ***e-Funktion***

$$y = e^x = \exp(x).$$

  Näherungsweise ist $e \approx 2,71$.

- Anmerkung: Man beachte, daß speziell die Rechenregeln $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$ und $e^a/e^b = e^{a-b}$ sowie $(e^a)^b = e^{ab}$ gelten.

- Definition

  Es sei $b > 0$ und $b \neq 1$. Die Umkehrfunktion zu $y = b^x$ heißt ***Logarithmus zur Basis* b**, geschrieben $f(x) = \log_b x$. Der Definitionbereich ist die Menge der positiven reellen Zahlen, $D(f) = (0, \infty)$.

  Die Umkehrfunktion zur e-Funktion wird als ***natürlicher Logarithmus*** bezeichnet und $f(x) = \log_e x = \ln x$ geschrieben.

- Anmerkung: Für Logarithmen gelten die folgenden Rechenregeln, wobei $b > 0$ und $b \neq 1$ sowie x, x_1, $x_2 > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ sei.

$$\begin{aligned}\log_b(x_1 \cdot x_2) &= \log_b x_1 + \log_b x_2 \\ \log_b\left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_b x_1 - \log_b x_2 \\ \log_b(x^r) &= r \log_b x\end{aligned}$$

- Anmerkung: Da $y = b^x$ und $y = \log_b x$ Umkehrfunktionen zueinander sind, kehren sich ihre Wirkungen um.

  Wird auf die Zahl x zuerst die Exponentialfunktion und dann auf das Ergebnis dieser Berechnung der Logarithmus angewendet, entsteht wieder x. Es gilt also $\log_b b^x = x$.

  Bildet man umgekehrt zuerst den Logarithmus von x und wendet dann auf diese Zahl die Exponentialfunktion an, entsteht ebenfalls wieder die Ausgangszahl, also $b^{\log_b x} = x$.

  Setzt man $x = 0$ bzw. $x = 1$ in $\log_b b^x = x$ ein, erhält man $\log_b 1 = 0$ bzw. $\log_b b = 1$. Geometrisch bedeutet das insbesondere, daß die Kurve $y = \log_b x$ bei 1 durch die x-Achse geht, egal welchen Wert die Basis b hat.

- Anmerkung: Besonders nützlich ist die Beziehung

$$x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \cdot \ln x} \qquad (x > 0 \text{ und } r \in \mathbb{R}).$$