Logik: aussagenlogische Formeln und Wahrheitstafeln

Aufgabe 1.
Schreiben Sie für die folgenden zusammengesetzten Aussagen (aussagenlogischen Fomeln) ϕ_1 bis ϕ_4 die Wahrheitstafeln auf. Welche der Formeln sind erfüllbar? Gibt es Tautologien oder Kontradiktionen?

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (A \vee (\neg B)) \wedge A \\ \phi_2 &= A \vee (\neg(A \wedge B)) \\ \phi_3 &= (A \vee (\neg B)) \wedge (\neg A) \\ \phi_4 &= (A \wedge B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B)) \end{aligned}$$

Aufgabe 2.
Beweisen Sie mit Wahrheitstafeln die folgenden logischen Äquivalenzen.

1. $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \to B) \wedge (B \to A))$
2. $(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$
3. $(A \vee B) \equiv (\neg(\neg A \wedge \neg B))$

Also kann man jede zusammengesetzte Aussage nur mit den beiden Junktoren $\neg$ und $\wedge$ formulieren. Denn falls die Junktoren $\vee$, $\to$ oder $\leftrightarrow$ vorkommen, ersetzt man zunächst $\leftrightarrow$, dann $\to$ und schließlich $\vee$ entsprechend den obigen logischen Äquivalenzen.

Ist es mögliche, jede zusammengesetzte Aussage nur unter Verwendung der beiden Junktoren $\neg$ und $\vee$ zu formulieren?

Aufgabe 3.
Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, daß es sich bei den folgenden aussagenlogischen Formeln um Tautologien handelt.

1. $A \vee (\neg A)$
   Satz vom ausgeschlossenen Dritten.
2. $\neg(A \wedge (\neg A))$
   Satz vom Widerspruch.
3. $(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A$
   Satz von der doppelten Verneinung.

4. $(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
   $(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
   Sätze von De Morgan.

5. $((A \to B) \wedge A) \to B$
   Abtrennungsregel.

6. $((A \to B) \wedge (\neg B)) \to (\neg A)$
   Widerlegungsregel.

7. $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$
   Kettenschlußregel.

Aufgabe 4.
In einem technischen Dokument stehen die folgenden[1] Aussagen.

1. If the file system is not locked, then
   (a) new messages will be queued;
   (b) new messages will be sent to the message buffer;
   (c) the system is functioning normally, and conversely.
2. If new messages are not queued, then they will be sent to the message buffer.
3. New messages will not be sent to the message buffer.

Sind diese Spezifikationen konsistent, oder gibt es einen inneren Widerspruch?

1. Übersetzen Sie zunächst die einzelnen Teile der Spezifikation in Formeln der Aussagenlogik. Verwenden Sie die folgenden vier Aussagen:
   L für „file system locked“;
   Q für „new messages are queued“;
   B für „new messages are sent to the message buffer“;
   N für „system functioning normally“.
2. Die Spezifikation ist konsistent, wenn es eine Zuweisung von Wahrheitswerten zu den Aussagen gibt, so daß jeder der logischen Ausdrücke wahr ist. Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle um festzustellen, ob die Spezifikation konsistent ist.
3. Kann man auch ohne eine Wahrheitstabelle herausfinden, ob die Spezifikation konsistent ist? Nehmen Sie dazu die aufgestellten Formeln, und versuchen Sie, mit einer geschickten Argumentation ohne Tabelle zum Ergebnis zu kommen.

[1] Rosen: Discrete Mathematics and Its Applications (Fifth Edition), Seite 19, Aufgabe 1.1.48.