

Logik: Junktoren, Normalformen, Prädikate und Quantoren

Aufgabe 1.

Finden Sie eine Formel, die logisch äquivalent zu $A \oplus B$ ist und nur die Junktoren \neg , \wedge , \vee enthält. (Hierbei ist \oplus das exklusive Oder.) Hinweis: Arbeiten Sie mit einer Wahrheitstafel.

Aufgabe 2.

Stellen Sie zunächst den Junktor \neg und anschließend den Junktor \wedge mit dem Sheffer-Operator $|$ (NAND-Operator) dar.

Aufgabe 3.

Stellen Sie zu der folgenden Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel ϕ in disjunktiver und eine in konjunktiver Normalform auf.

x	y	z	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Aufgabe 4.

Es sei $P(x)$ ein Prädikat und $M = \{a, b, c\}$ die Grundmenge zu x . Zu den folgenden Aussagen sollen logisch äquivalente Aussagen angegeben werden, die keine Quantoren enthalten.

- a) $\forall x P(x)$ b) $\exists x P(x)$ c) $\neg \forall x P(x)$
d) $\neg \exists x P(x)$ e) $\forall x \neg P(x)$ f) $\exists x \neg P(x)$

Aufgabe 5.

Es sei $P(x)$ das Prädikat „ $x + 1 > 2x$ “. Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen, wenn die Grundmenge aus allen ganzen Zahlen besteht?

- a) $P(0)$ b) $P(-1)$ c) $P(1)$ d) $\exists x P(x)$
e) $\forall x P(x)$ f) $\exists x \neg P(x)$ g) $\forall x \neg P(x)$ h) $\neg \forall x P(x)$

Aufgabe 6.

Das Prädikat $P(x, y)$ stehe für „Student/Studentin x hat die Vorlesung y besucht“. Die Grundmenge zu x seien alle Studierenden und die Grundmenge zu y seien alle Vorlesungen des Fachbereichs MNI. Schreiben Sie die folgenden Aussagen als deutsche Sätzen auf.

- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $\exists x \exists y P(x, y)$ | b) $\exists x \forall y P(x, y)$ | c) $\exists y \forall x P(x, y)$ |
| d) $\forall x \exists y P(x, y)$ | e) $\forall y \exists x P(x, y)$ | f) $\forall x \forall y P(x, y)$ |

Aufgabe 7.

Es sei $P(x, y)$ das Prädikat „ x ist ein Teiler von y “. Die Grundmengen für x und für y sei die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist eine Aussage? Welche der Aussagen ist wahr, welche ist falsch?

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $P(10, y)$ | b) $P(x, 100)$ | c) $\forall x P(x, y)$ | d) $\exists x P(x, 7)$ |
| e) $\forall x \exists y P(x, y)$ | f) $P(3, 9)$ | g) $P(3, 7)$ | h) $\exists x P(x, 9)$ |
| i) $\forall x P(x, 9)$ | j) $\exists x \forall y P(x, y)$ | k) $\forall x P(x, x)$ | l) $\forall y P(1, y)$ |