

## Vollständige Induktion

### Aufgabe 1.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß die Summe der ersten  $n$  natürlichen Zahlen gleich  $n(n+1)/2$  ist, also

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

**Lösung:** Für  $n = 1$  ist die Formel gültig, wie man sofort durch Einsetzen sieht:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Damit haben wir die Induktionsbasis.

Im Induktionsschritt zeigen wir, daß aus der Gültigkeit der Summenformel für  $n = k$ , also der Induktionsannahme, die Gültigkeit für  $n = k + 1$  folgt. Dazu werden in dem Ausdruck

$$1 + 2 + \dots + k + k + 1$$

die ersten  $k$  Summanden aufgrund der Induktionsannahme zusammengefaßt. Anschließend erhält man mit einer einfachen Umformung die Summenformel für den Fall  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k + k + 1 &= (1 + 2 + \dots + k) + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Damit haben wir sowohl die Induktionsbasis als auch den Induktionsschritt, so daß die Gültigkeit der Summenformel für alle natürlichen Zahlen bewiesen ist.

### Aufgabe 2.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$1 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**Lösung:** Es sei  $A(n)$  die Aussageform  $1 + 2^3 + \dots + n^3 = n^2(n + 1)^2/4$ .

1. *Induktionsbasis*

Es muß gezeigt werden, daß die Aussage  $A(1)$  wahr ist. Dies sieht man sofort durch Einsetzen von  $n = 1$  in  $A(n)$ :

$$1 = \frac{1(1 + 1)^2}{4}.$$

2. *Induktionsschritt*

Es sei  $k \in \mathbb{N}$  beliebig gegeben. Dann ist zu zeigen: Aus der Induktionsannahme  $A(k)$  folgt  $A(k + 1)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k + 1)^3 &= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3 \\ &= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + \frac{4(k + 1)^3}{4} \\ &= \frac{(k + 1)^2 \cdot [k^2 + 4(k + 1)]}{4} \\ &= \frac{(k + 1)^2 \cdot [k^2 + 4k + 4]}{4} \\ &= \frac{(k + 1)^2 \cdot (k + 2)^2}{4}, \end{aligned}$$

also gilt  $A(k + 1)$ . (In der ersten Zeile der Umformung wurde die Induktionsannahme verwendet.)

Aus 1. und 2. folgt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

### Aufgabe 3.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach  $n$ , daß für alle reellen  $q \neq 1$  und alle ganzen Zahlen  $n \geq 0$  die Gleichung

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

gilt.

**Lösung:** Die Aussageform  $A(n)$  sei  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$ .

1. *Induktionsbasis*

Die Aussage  $A(0)$  ist wahr, da

$$1 = \frac{1 - q}{1 - q}$$

ist.

## 2. Induktionsschritt

Es sei  $k \in \mathbb{N}$ . Wir nehmen  $A(k)$  an und zeigen, daß  $A(k+1)$  folgt:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \dots + q^k + q^{k+1} &= \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1} \\ &= \frac{1 - q^{k+1} + (1 - q)q^{k+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{k+1} + q^{k+1} - q^{k+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{k+2}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Aus 1. und 2. folgt  $A(n)$  für jede ganze Zahl  $n \geq 0$ .

### Aufgabe 4.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Summenformel

$$\sum_{\nu=1}^n \nu \cdot \nu! = (n+1)! - 1.$$

**Lösung:** Die Aussageform  $A(n)$  sei  $\sum_{\nu=1}^n \nu \cdot \nu! = (n+1)! - 1$ .

#### 1. Induktionsbasis

Es gilt  $1 \cdot 1! = 1$  und andererseits

$$(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1,$$

so daß die Aussage  $A(1)$  wahr ist.

#### 2. Induktionsschritt

Es sei  $k \in \mathbb{N}$  gegeben. Wir nehmen  $A(k)$  an und zeigen  $A(k+1)$ . Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{k+1} \nu \cdot \nu! &= \sum_{\nu=1}^k \nu \cdot \nu! + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Umformung die Induktionsannahme verwendet wurde. Wegen

$$\begin{aligned} (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! &= (k+1)! + (k+1)!(k+1) - 1 \\ &= (k+1)! \cdot [1 + (k+1)] - 1 \\ &= (k+1)! \cdot (k+2) - 1 \\ &= (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} \nu \cdot \nu! = (k+2)! - 1,$$

und der Induktionsschritt ist komplett.

Insgesamt folgt aus 1. und 2., daß  $A(n)$  für jede natürliche Zahl  $n$  gilt.