

## Relationen: Verkettungen, Wege, Hüllen

### Aufgabe 1.

Es bezeichne  $R$  die Relation  $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$  und  $S$  die Relation  $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$ . Geben Sie  $S \circ R$  an. Skizzieren Sie die Verknüpfung mit Hilfe gerichteter Graphen. Berechnen Sie die Boolesche Matrix der Relation  $S \circ R$  aus den Booleschen Matrizen von  $S$  und  $R$ .

**Lösung:** Schreibweise: Zu  $R_1 \subseteq A \times B$  und  $R_2 \subseteq B \times C$  ist

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, c) \mid (\exists b) ((a, b) \in R_1) \wedge ((b, c) \in R_2)\}.$$

Die Relationen  $R$  und  $S$  sind vorgegeben als

$$\begin{aligned} R &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}, \\ S &= \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}. \end{aligned}$$

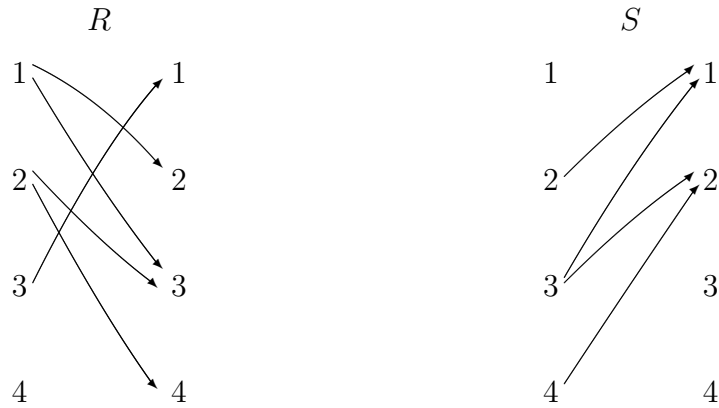
Entsprechend der Definition für die Verknüpfung von Relationen können wir nun feststellen, welche Paare in  $S \circ R$  liegen.

$$\begin{aligned} (1, 2) \in R \wedge (2, 1) \in S &\Rightarrow (1, 1) \in S \circ R \\ (1, 3) \in R \wedge (3, 1) \in S &\Rightarrow (1, 1) \in S \circ R \\ (1, 3) \in R \wedge (3, 2) \in S &\Rightarrow (1, 2) \in S \circ R \\ (2, 3) \in R \wedge (3, 1) \in S &\Rightarrow (2, 1) \in S \circ R \\ (2, 3) \in R \wedge (3, 2) \in S &\Rightarrow (2, 2) \in S \circ R \\ (2, 4) \in R \wedge (4, 2) \in S &\Rightarrow (2, 2) \in S \circ R \end{aligned}$$

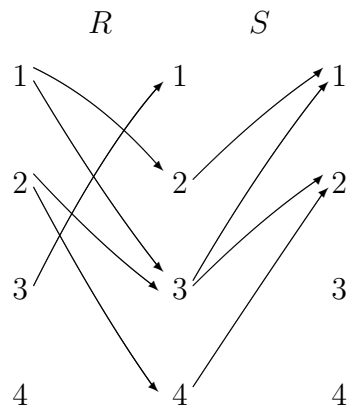
Zwar ist  $(3, 1) \in R$ , aber in  $S$  ist kein Paar mit der 1 an der ersten Position, d.h. über  $(3, 1) \in R$  wird kein Beitrag zu  $S \circ R$  geliefert. Insgesamt habe wir damit

$$S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

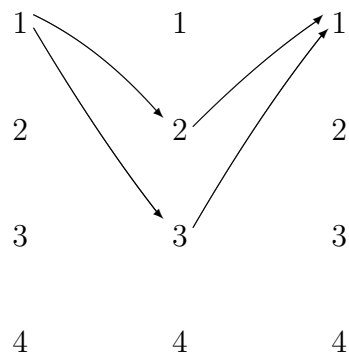
Die Verknüpfung von  $R$  und  $S$  läßt sich anschaulich sehr schön darstellen, wenn man  $R$  und  $S$  nicht wie üblich zeichnet, sondern die Ecken zweimal nebeneinander auflistet.



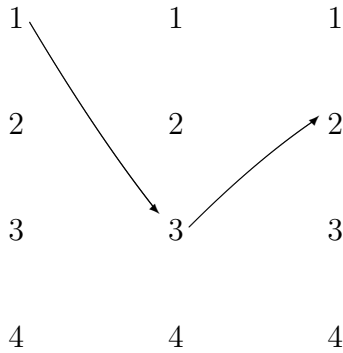
Werden jetzt die Endpunkte von  $R$  und die Anfangspunkte von  $S$  zusammengelegt, so besteht  $S \circ R$  aus allen Paaren, für die es mindestens einen Weg von links nach rechts über ein „verbindendes“ Element in der Mitte gibt.



Zum Beispiel sieht man auf zwei Arten, daß  $(1, 1)$  in  $S \circ R$  liegt:



Ferner gehört zum Beispiel das Paar  $(1, 2)$  wegen des folgenden Weges zu  $S \circ R$ :



Um die Boolesche Matrix der Relation  $S \circ R$  aus den Booleschen Matrizen von  $R$  und  $S$  berechnen zu können, schreiben wir diese Matrizen zunächst auf.

$R$	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	0
4	0	0	0	0

$S$	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	1	1	0	0
4	0	1	0	0

Die Boolesche Matrix der Relation  $S \circ R$  wird mit einer abgeänderten Matrizenmultiplikation berechnet, bei der „ $\vee$ “ (das logische Oder) anstelle von „ $+$ “ verwendet wird, und „ $\wedge$ “ (das logische Und) anstelle von „ $\cdot$ “.

Wir schreiben die Multiplikation in einem Rechenschema auf:

		$S$		0	0	0	0
				1	0	0	0
$R$		$S \circ R$		1	1	0	0
				0	0	1	0
				0	0	1	0
				0	0	0	0
				1	0	0	0
				0	0	0	0

Zum Beispiel entsteht das Element in der zweiten Zeile und der ersten Spalte durch

$$(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1.$$

Im folgenden Schema werden diejenigen Elemente der Booleschen Matrizen dargestellt, die an dieser Berechnung beteiligt sind.

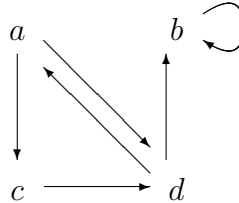
		0
		1
		1
		0
0	0	1
1	1	1

### Aufgabe 2.

Es sei die Relation  $R = \{(a, c), (a, d), (b, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$  auf der Menge  $M = \{a, b, c, d\}$  gegeben. Zeichnen Sie den gerichteten Graphen von  $R$ , und bestimmen Sie mit dessen Hilfe die Relationen  $R^2$  und  $R^3$ .

**Lösung:** Es gibt zwei Möglichkeiten, die Relation graphisch zu veranschaulichen.

- 1. Darstellung



Der gerichtete Graph mit den Ecken  $a, b, c$  und  $d$  und den gerichteten Kanten entsprechend der Relation wird gezeichnet. Man erhält  $R^2$  und  $R^3$  durch

$$R^2 = \{(x, y) \mid \text{es existiert ein Weg der Länge 2 von } x \text{ nach } y\},$$

$$R^3 : \text{ analog mit Länge 3.}$$

Konkret kann man zum Beispiel systematisch durchprobieren, ob  $(a, a)$  in  $R^2$  ist,  $(a, b)$  in  $R^2$  ist,  $(a, c)$  in  $R^2$  ist, u.s.w., wobei Tabellen praktisch sind.

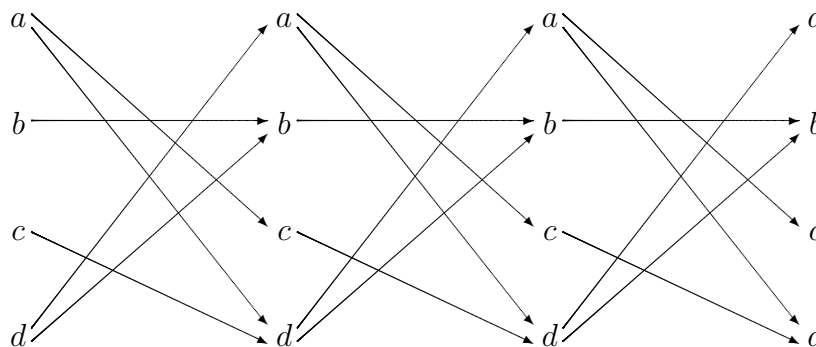
	in $R^2$	in $R^3$
$(a, a)$	ja	ja
$(a, b)$	ja	ja
$(a, c)$	nein	ja
$(a, d)$	ja	ja

	in $R^2$	in $R^3$
$(b, a)$	nein	nein
$(b, b)$	ja	ja
$(b, c)$	nein	nein
$(b, d)$	nein	nein

	in $R^2$	in $R^3$
$(c, a)$	ja	nein
$(c, b)$	ja	ja
$(c, c)$	nein	ja
$(c, d)$	nein	ja

	in $R^2$	in $R^3$
$(d, a)$	nein	ja
$(d, b)$	ja	ja
$(d, c)$	ja	nein
$(d, d)$	ja	ja

- 2. Darstellung

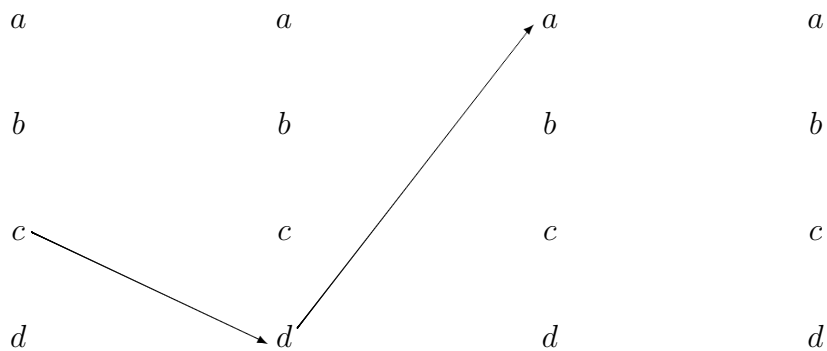


Die Spalte mit den Ecken  $a, b, c$  und  $d$  wird viermal nebeneinander geschrieben. Von einer Spalte zur nächsten werden gerichtete Kanten entsprechend der Relation gezeichnet. Hier bekommt man  $R^2$  und  $R^3$  durch

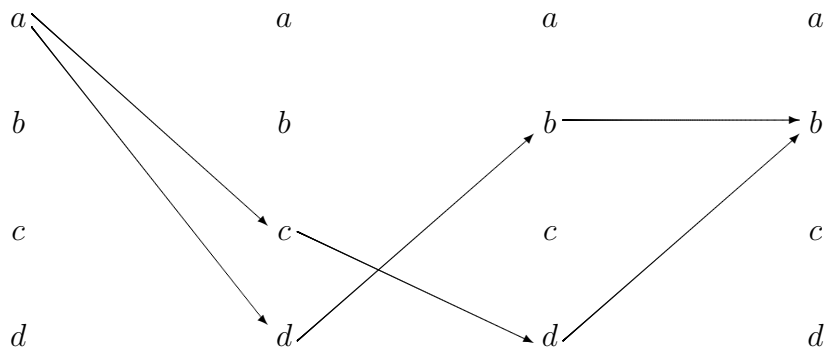
$R^2$ : besteht aus allen Paaren  $(x, y)$ , für die ein Weg der Länge 2 von dem Element  $x$  in der linken Spalte zu dem Element  $y$  zwei Spalten weiter existiert;

$R^3$ : besteht aus allen Paaren  $(x, y)$ , für die ein Weg der Länge 3 von  $x$  in der linken Spalte zu  $y$  in der rechten Spalte existiert.

Diese Darstellung ist zwar aufwendiger als die erste, aber die Wege sind leicht zu erkennen. Im folgenden ist zum Beispiel ein Weg der Länge 2 von  $c$  nach  $a$  herausgestellt, der zeigt, daß  $(c, a) \in R^2$  gilt.



Im folgenden sehen wir, daß es zwei Wege der Länge 3 von  $a$  nach  $b$  gibt. Also gilt  $(a, b) \in R^3$ . (Selbstverständlich hätte schon ein Weg genügt.)



Insgesamt kann man also unmittelbar ablesen, daß sich

$$R^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

und

$$R^3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, d)\}$$

für die gesuchten Relationen ergibt.

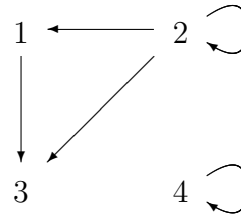
### Aufgabe 3.

Es sei  $R$  die Relation  $\{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 4)\}$  auf der Menge  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Geben Sie  $R^{-1}$  an. Schreiben Sie zu  $R$  und  $R^{-1}$  die Booleschen Matrizen auf, und zeichnen Sie die gerichteten Graphen.

**Lösung:**

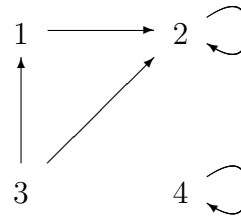
- $R = \{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 4)\}$

	1	2	3	4
1	0	0	1	0
2	1	1	1	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	1



- $R^{-1} = \{(3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 4)\} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 4)\}$

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	1	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	0	1



Matrix: Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

Graph: Richtungen der Pfeile umdrehen.

### Aufgabe 4.

Bestimmen Sie zu den folgenden Relationen auf der Menge  $\{a, b, c, d, e\}$  die reflexive, die symmetrische und die transitive Hülle. Zeichnen Sie zu jeder Relation den gerichteten Graphen.

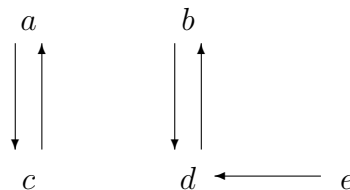
$$R_1 = \{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$$

$$R_2 = \{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$$

$$R_3 = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$$

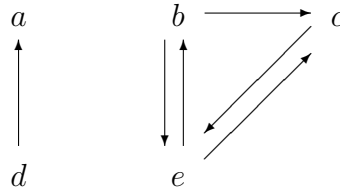
**Lösung:**

1.  $R_1 = \{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b), (e, d)\}$



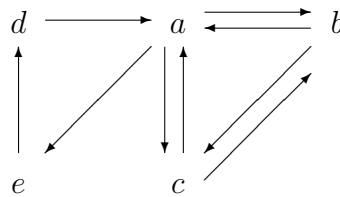
- reflexive Hülle:  $R_1 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
- symmetrische Hülle:  $R_1 \cup \{(d, e)\}$
- transitive Hülle:  $R_1 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, b)\}$

2.  $R_2 = \{(b, c), (b, e), (c, e), (d, a), (e, b), (e, c)\}$



- reflexive Hülle:  $R_2 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
- symmetrische Hülle:  $R_2 \cup \{(a, d), (c, b)\}$
- transitive Hülle:  $R_2 \cup \{(b, b), (c, b), (c, c), (e, e)\}$

3.  $R_3 = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b), (d, a), (e, d)\}$



- reflexive Hülle:  $R_3 \cup \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
- symmetrische Hülle:  $R_3 \cup \{(a, d), (d, e), (e, a)\}$
- transitive Hülle:  $\{a, b, c, d, e\} \times \{a, b, c, d, e\}$ , d.h. die transitive Hülle besteht aus allen Paaren, die überhaupt möglich sind.

Zur Bestimmung der transitiven Hülle ist ein Satz aus der Vorlesung hilfreich: Das Paar  $(x, y)$  liegt in der transitiven Hülle von  $R$ , wenn es in  $R$  einen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt.