

Relationen: Grundlegende Eigenschaften

Aufgabe 1.

Welche der folgenden Relationen R auf der Menge der Menschen ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Es sei $(x, y) \in R$ genau dann, wenn

- (a) x ist größer als y ,
- (b) x und y wurden am selben Tag geboren,
- (c) x hat denselben Vornamen wie y ,
- (d) x und y haben eine gemeinsame Großmutter.

Aufgabe 2.

Welche der folgenden Relationen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Schreiben Sie die Booleschen Matrizen der Relationen auf, und zeichnen Sie die gerichteten Graphen.

- (a) $R_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
- (b) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- (c) $R_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$
- (d) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
- (e) $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- (f) $R_6 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

Aufgabe 3.

In der Vorlesung wurde hergeleitet, daß es auf einer endlichen Menge mit n Elementen genau 2^{n^2} voneinander verschiedene Relationen gibt.

- (a) Ändern Sie die den Beweis ab, und finden Sie heraus, wieviele reflexive und wieviele symmetrische Relationen auf einer Menge mit n Elementen existieren.
- (b) Wieviel Prozent aller Relationen auf einer Menge mit n Elementen sind reflexiv? Wie groß ist der Prozentsatz für $n = 1, 2, 3$ und 4 ? Wie groß ist er ungefähr, wenn $n = 100$ ist?

Aufgabe 4.

(Warnung: Die Aufgabe ist sehr umfangreich! Sie muß nicht komplett bearbeitet werden.)

Stellen Sie fest, ob die folgenden Relationen auf der Menge der ganzen Zahlen reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv sind, wobei $(x, y) \in R$ genau dann, wenn

- (a) $x \neq y$,
- (b) $xy \geq 1$,
- (c) $x = y + 1$ oder $x = y - 1$,
- (d) $x \equiv y \pmod{7}$,
- (e) x ist ein Vielfaches von y ,
- (f) x und y sind beide negativ oder beide nichtnegativ,
- (g) $x = y^2$,
- (h) $x \geq y^2$.