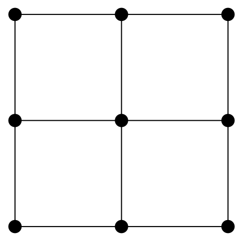
Graphen: Rundtouren

Aufgabe 1.
Gibt es in dem folgenden Graphen eine Euler-Rundtour? Gibt es eine Hamilton-Rundtour?



Lösung: Es gilt:

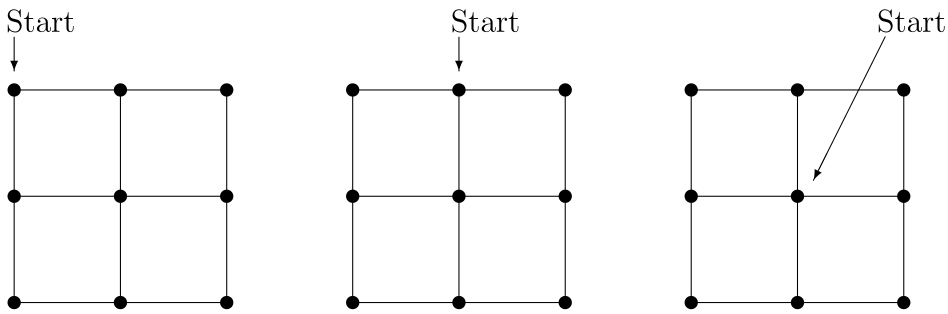
$$\text{Eine Euler-Rundtour ist möglich.} \quad \Longrightarrow \quad \text{Alle Knoten haben geraden Grad.}$$

Daraus folgt mit Kontraposition:

$$\begin{gathered}\text{Es existiert ein Knoten mit ungeradem Grad.}\\ \Longrightarrow \\ \text{Eine Euler-Rundtour ist nicht möglich.}\end{gathered}$$

Da der Graph Knoten mit ungeradem Grad enthält, ist *keine* Euler-Rundtour möglich.

Um zu untersuchen, ob eine Hamilton-Rundtour möglich ist, führen wir eine Fallunterscheidung durch; wir starten mit der Tour an drei verschiedenen Knoten. Aus Symmetriegründen haben wir damit alle neun möglichen Fälle für einen Startknoten abgedeckt.



In allen Fällen zeigt sich: In dem Graphen ist *keine* Hamilton-Rundtour möglich.

In den beiden ersten Fällen läuft man entweder außen herum und verpaßt die Mitte, oder man geht zur Mitte und kommt dann nicht mehr durch einen der Eckpunkte.

Im dritten Fall kommt man nicht mehr zur Mitte zurück, wenn man alle äußeren Knoten durchläuft.

Aufgabe 2.
Welche der Graphen C_n, K_n und W_n sind Euler-Graphen? Welche sind Hamilton-Graphen?

Lösung: Bezüglich Euler-Graphen gilt (siehe Vorlesung):

1. Existiert in einem Graphen ein Knoten mit ungeradem Grad, dann gibt es keine Euler-Rundtour.
2. Ist ein Graph zusammenhängend, und haben alle Knoten geraden Grad, dann existiert eine Euler-Rundtour.

Die Graphen C_n, K_n und W_n sind alle zusammenhängend.

- C_n $(n \geq 3)$:

  Alle Knoten haben den Grad 2. Damit sind alle C_n eulersch.

- K_n $(n \geq 3)$:

  Alle Knoten haben den Grad $n - 1$. Also sind die Graphen K_n eulersch für n ungerade und nicht eulersch für n gerade.

- W_n $(n \geq 3)$:

  Alle „äußeren" Knoten eines Rades haben den Grad 3. Somit ist keiner der Graphen W_n eulersch.

Bezüglich Hamilton-Graphen können wir zeigen: Alle Graphen C_n, K_n und W_n mit beliebigem $n \geq 3$ sind Hamilton-Graphen. Wir geben im folgenden die Begründungen an.

- C_n $(n \geq 3)$:

  Man startet an einem beliebigen Knoten und läuft „außen auf dem Rad herum". Dadurch wird jeder Knoten genau einmal besucht, und man kommt zum Ausgangsknoten zurück.

- K_n $(n \geq 3)$:

  Man startet bei einem beliebigen Knoten und besucht dann Schritt für Schritt Knoten, die bis dahin noch nicht durchlaufen wurden. Hat man alle Knoten besucht, geht man zum Ausgangsknoten zurück. Das alles ist möglich, da bei einem vollständigen Graphen alle überhaupt möglichen Kanten vorhanden sind, so daß man von jedem Knoten zu jedem beliebigen anderen Knoten gehen kann.

- W_n ($n \geq 3$):

  Man startet zum Beispiel bei der Radnabe, geht dann zu einem beliebigen „äußeren“ Knoten des Rades und läuft dann „außenherum“ bis zum letzten noch nicht besuchten Knoten. Von dort geht man zurück zur Radnabe und hat damit einen geschlossenen Rundweg, bei dem jeder Knoten exakt einmal besucht wurde.

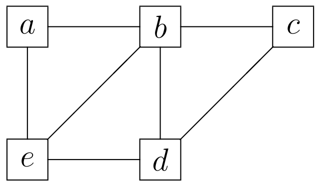
Aufgabe 3.
Gibt es in $G = (V, E)$ bei den folgenden Knoten- und Kantenmengen einen Hamiltonkreis? Falls ja, geben Sie einen an.

1. $V = \{a, b, c, d, e\}$
   $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$

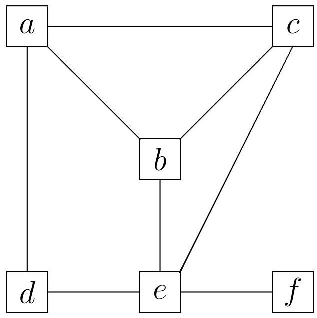
2. $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
   $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{e, f\}\}$

Lösung:

1. Eine Hamilton-Rundtour ist möglich, zum Beispiel durch a, b, c, d, e, a.



2. Eine Hamilton-Rundtour ist nicht möglich.



- Fall 1: Startet man bei f, kommt man nicht mehr zu f zurück.
- Fall 2: Startet man nicht bei f, muß man irgendwann f besuchen und kommt nicht mehr weg.