

Vektoren

Grundbegriffe, Schreibweisen, elementare Rechenregeln

- Physikalische Größen bestehen aus
 1. Maßzahl und Einheit; Bezeichnung: Skalar, skalare Größe (z.B. Masse, Temperatur, Energie);
 2. Maßzahl, Richtung und Einheit; Bezeichnung: Vektor, vektorielle Größe (z.B. Kraft, Geschwindigkeit, Feldstärke).

- Definition (geometrisch)

Es seien P und Q zwei Punkte im Raum. Die gerichtete Strecke von P nach Q nennt man einen **Vektor**, Schreibweise: \overrightarrow{PQ} . Dabei heißt P Anfangs- und Q Endpunkt.

- Definition (geometrisch)

Zwei Vektoren heißen **gleich**, wenn sie durch Parallelverschiebung ineinander überführbar sind.

- Skizze: Die Längen und Richtungen der Vektorpfeile stimmen überein.
- Anmerkung: Spielt der Anfangspunkt eine Rolle, muß eine Zusatzinformation gegeben werden, z.B. „der Kraftvektor \vec{F} greift im Punkt P an“.

Durch unsere Festlegung der Gleichheit wird es möglich, Vektoren auf eine einfache Art zahlenmäßig zu beschreiben: Wir gehen davon aus, daß die Punkte des Raums durch ein kartesisches Koordinatensystem dargestellt werden. Ein gegebener Vektor \vec{a} wird dann parallel verschoben, so daß sein Anfangspunkt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems zu liegen kommt. Die Koordinaten des Endpunkts von \vec{a} charakterisieren dann \vec{a} vollständig.

Wir bezeichnen die Koordinaten der Vektorspitze von \vec{a} durch a_x und a_y , wenn wir in der Ebene arbeiten. Im Raum kommt noch a_z hinzu. Liegt der Vektor in der Ebene, wird er also durch das Zahlenpaar (a_x, a_y) vollständig beschrieben. Im Raum stellt das Tripel (a_x, a_y, a_z) den Vektor eindeutig dar. Wir schreiben: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Für $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ gilt damit $\vec{a} = \vec{b}$ genau dann, wenn $a_x = b_x$, $a_y = b_y$ und $a_z = b_z$ ist.

- Bezeichnungen (Koordinatendarstellung von Vektoren)

Die Darstellung von \vec{a} als $\vec{a} = (a_x, a_y)$ heißt **Zeilenvektor**, die Darstellung $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ **Spaltenvektor**, entsprechend im Dreidimensionalen.

Die reellen Zahlen a_x , a_y und a_z heißen die **Koordinaten** (oder die *skalaren Komponenten*) des Vektors.

- Anmerkung: Das kartesische Koordinatensystem, das wir im dreidimensionalen Raum verwenden, soll ein **Rechtssystem** sein, d.h. die z -Achse zeigt in die Richtung, in die sich eine Rechtsschraube bewegt, wenn sie so herum gedreht wird, wie bei der Drehung der positiven x -Achse auf kürzestem Weg in die positive y -Achse.
- Bezeichnung: Zu einem Punkt P der Ebene oder des Raumes heißt der Vektor vom Ursprung (Nullpunkt) des Koordinatensystems nach P der **Ortsvektor** von P , geschrieben $\vec{0P}$.
- Anmerkung: Das *Parallelogramm der Kräfte* legt nahe, daß für die Addition zweier Vektoren $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ die Festlegung

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

sinnvoll ist.

Da für $\vec{F} + \vec{F}$ die Schreibweise $2 \cdot \vec{F}$ vernünftig ist, bietet es sich ferner an, für die Multiplikation einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ mit einem Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ die Vereinbarung

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

zu treffen.

Arbeitet man im Zweidimensionalen, läßt man die dritte Koordinate weg.

- Skizzen (auch zur Summe mehrerer Vektoren: Vektorpolygon).
- Anmerkung: Statt $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$ schreibt man $\vec{a} - \vec{b}$ und hat damit auch die Subtraktion von Vektoren eingeführt.
- Anmerkung: Vom Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y)$ in der Ebenen und dem Vektor $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ im Raum verallgemeinern wir auf den Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ im n -dimensionalen Raum.

Dabei definieren wir den allgemeinen Vektorbegriff so, daß die zwei- und dreidimensionalen Spezialfälle unseren bisherigen Veranschaulichungen entsprechen.

- Definition (n -dimensionaler Vektorraum)

Die Menge der reellen n -Tupel

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ mit } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

mit den Operationen

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n) \quad (\text{mit } \lambda \in \mathbb{R}),$$

heißt der **n -dimensionale Vektorraum** über \mathbb{R} .

Die Elemente des \mathbb{R}^n heißen **Vektoren**.

Zum n -dimensionalen Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ heißen die a_i ($i = 1, \dots, n$) die **Koordinaten** (*skalaren Komponenten*) des Vektors.

Wir schreiben $\vec{a} - \vec{b}$ für $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$.

- Anmerkung:
 1. Speziell ist $0 \cdot \vec{a} = (0, 0, \dots, 0)$, der sogenannte **Nullvektor**, Schreibweise: $\vec{0}$. Der Nullvektor hat als einziger Vektor keine Richtung.
 2. Der Vektor $-\vec{a}$ heißt „der zu \vec{a} entgegengesetzt gleiche (inverse) Vektor“.
 3. Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} heißen zueinander parallel, $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, falls $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ mit $\lambda > 0$ ist, sie heißen antiparallel, $\vec{a} \downarrow \vec{b}$, falls $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ mit $\lambda < 0$ ist.
- Anmerkung: Die Spezialfälle $n = 2$ bzw. $n = 3$ können wir uns durch Pfeile in der Ebene bzw. im Raum veranschaulichen.

- Beispiele

- Satz (Rechenregeln)

Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \vec{a} \in \mathbb{R}^n,$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{Kommutativität}),$
3. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{Assoziativität}),$
4. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} = \vec{0} + \vec{a} \quad (\text{Existenz eines neutralen Elements}),$
5. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \quad (\text{Existenz inverser Elemente}),$
6. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad (\text{Distributivität}),$
7. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a} \quad (\text{Distributivität}),$
8. $(\lambda \mu)\vec{a} = \lambda(\mu \vec{a}),$
9. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$

- Beweis: Folgt sofort aus den Definitionen von $\vec{a} + \vec{b}$ und $\lambda \vec{a}$ sowie den Rechenregeln in \mathbb{R} .

- Definition (Betrag)

Es sei $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Die reelle Zahl

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

heißt **Betrag** (Länge) von \vec{a} .

- Anmerkung: Im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 entspricht das der Länge des Vektorpfeils, berechnet nach dem Satz des Pythagoras.

- Satz (Eigenschaften des Betrags)

Es gilt

1. $|\vec{a}| \geq 0$, $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$,
2. $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$,
3. $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (Dreiecksungleichung).

- Anmerkung: Die anschauliche Formulierung „Länge und Richtung legen einen Vektor fest“ heißt in Formeln ausgedrückt:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ und } \vec{a} \uparrow \vec{b}.$$

Ferner gilt

$$\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ und } \vec{a} \updownarrow \vec{b}.$$

- Beispiele