

Vektoren Ebenendarstellungen

- Vektorielle Darstellung einer **Ebene (Punkt-Richtungsform)**
Gegeben: Punkt P_1 und zwei Vektoren \vec{a} , \vec{b} (nicht kollinear).
Gesucht: Gleichung der Ebene durch P_1 und parallel zu \vec{a} und \vec{b} .
Alle Punkte der Ebene (und keine anderen Punkte) werden durch

$$\vec{r}(\lambda, \mu) = \vec{0P_1} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

mit Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ beschrieben.

- Skizze
- Beispiel
- Vektorielle Darstellung einer **Ebene (Dreipunkteform)**
Gegeben: Drei voneinander verschiedene Punkte P_1, P_2, P_3
(nicht auf einer gemeinsamen Geraden).
Gesucht: Gleichung der Ebene durch P_1, P_2 und P_3 .

Der Fall lässt sich mit $\vec{a} = \vec{P_1P_2}$ und $\vec{b} = \vec{P_1P_3}$ auf die Punkttrichtungsform der Ebenengleichung zurückführen.

- Definition
Ein **Normalenvektor** bezüglich einer Ebene ist ein Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht.
- Vektorielle Darstellung einer **Ebene** mittels eines **Normalenvektors**
Gegeben: Punkt P_1 und Vektor \vec{n} .
Gesucht: Gleichung der Ebene durch P_1 , auf der \vec{n} senkrecht steht.

Es sei \vec{r} der Ortsvektor eines beliebigen Punktes der Ebene. Der Differenzvektor $\vec{r} - \vec{0P_1}$ liegt in der Ebene, bildet also mit \vec{n} einen rechten Winkel, d.h. das Skalarprodukt ist Null:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{0P_1}) = 0.$$

Damit gilt: Alle Punkte der Ebene (und keine anderen Punkte) werden durch die Vektoren \vec{r} beschrieben, die der Gleichung

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{0P_1}$$

genügen.

- Anmerkung: Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ und der Abkürzung $D = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP_1}$ ergibt sich unmittelbar die kartesische Form der Ebenengleichung

$$Ax + By + Cz = D.$$

Speziell gilt für eine Ebene, die den Ursprung des Koordinatensystems enthält,

$$Ax + By + Cz = 0.$$

- Skizze
- Beispiele
- Beispiel: Gerade gegeben; Ebene gegeben. Gesucht ist der Durchstoßpunkt der Geraden durch die Ebene.
- Satz (Abstand Punkt-Gerade)

Ein Punkt Q mit dem Ortsvektor \vec{r}_Q hat von einer Geraden $\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{a}$ den Abstand

$$d = \frac{|\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}.$$

- Beweis
- Satz (Abstand Punkt-Ebene)

Eine Ebene sei durch einen Punkt P und einen Normalenvektor \vec{n} gegeben. Ein Punkt Q im Raum hat dann den (senkrechten) Abstand

$$d = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|}$$

von der Ebene.

- Beweis