

## Funktionen

### Grundbegriffe, Verschiebung, Skalierung

- Definition (Funktion)

Es seien  $A$  und  $B$  Mengen. Eine **Funktion** (oder *Abbildung*)  $f$  von  $A$  nach  $B$ ,

$$f : A \longrightarrow B$$

ist eine Vorschrift, die jedem Element  $x \in A$  genau ein Element  $y \in B$  zuordnet. Schreibweise:

$$y = f(x).$$

Dabei heißt  $x$  die *unabhängige* und  $y$  die *abhängige* Variable.

Die Menge  $A$  heißt **Definitionsbereich** (oder *Definitionsmenge*) von  $f$ , geschrieben  $D(f)$ . Die Menge  $\{y \mid y = f(x), x \in A\} \subseteq B$  heißt **Wertebereich** (oder *Wertemenge, Bildmenge*) von  $f$ , kurz  $W(f)$ .

- Skizzen:

1. Schematische Darstellung der Zuordnung  $y = f(x)$ ,
2.  $f(a) = f(b)$  ist erlaubt,
3. ein Beispiel für eine nicht erlaubte Zuordnung.

- Definition (Graph)

Der **Graph** einer Funktion  $f : A \longrightarrow B$  ist die Menge der geordneten Paare  $\{(x, y) \mid x \in A \text{ und } f(x) = y\}$ .

- Beispiele: Wir betrachten die Graphen

- der Potenzfunktionen  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  und  $y = x^4$ ,
- der Wurzelfunktionen  $y = \sqrt{x}$  und  $y = \sqrt[3]{x}$ ,
- der Winkelfunktionen  $y = \sin(x)$  und  $y = \cos(x)$ .

Siehe die Abbildungen auf den folgenden Seiten.

- Beispiel: Parameterdarstellung einer Funktion.

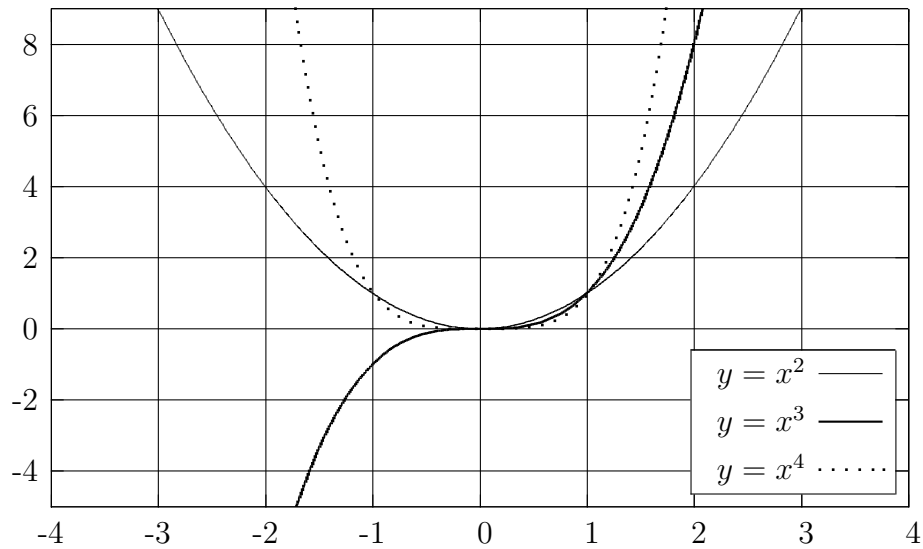


Abbildung 1: Potenzfunktionen

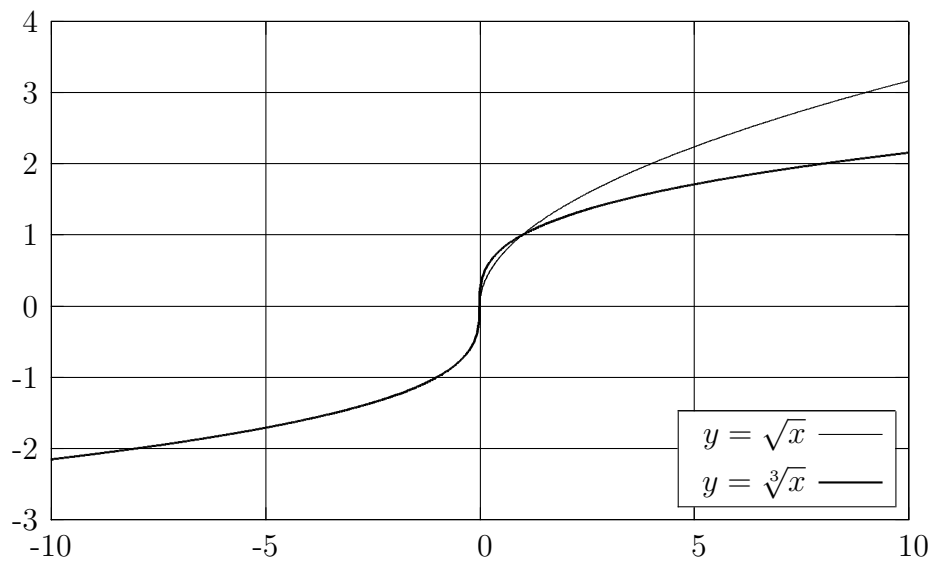


Abbildung 2: Wurzelfunktionen

- Definition (Eigenschaften von Funktionen)

Eine Funktion heißt

**gerade**  $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in D(f)$ ;

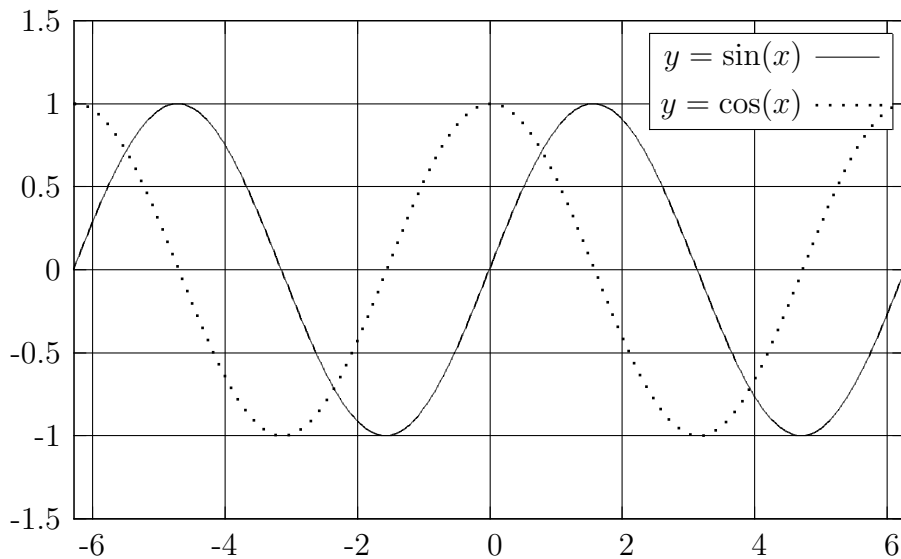


Abbildung 3: Winkelfunktionen

**ungerade**  $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in D(f)$ ;

**monoton wachsend**  $\Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$  für  $x_2 > x_1$  mit  $x_1, x_2 \in D(f)$ ;

**streng monoton wachsend**  $\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1)$  für  $x_2 > x_1$  mit  $x_1, x_2 \in D(f)$ ;

**monoton fallend**  $\Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$  für  $x_2 > x_1$  mit  $x_1, x_2 \in D(f)$ ;

**streng monoton fallend**  $\Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$  für  $x_2 > x_1$  mit  $x_1, x_2 \in D(f)$ ;

**(streng) monoton**  $\Leftrightarrow f$  (streng) monoton wachsend oder fallend;

**periodisch**  $\Leftrightarrow$  existiert ein  $p > 0$  mit  $f(x+p) = f(x)$  für alle  $x \in D(f)$ ;

**beschränkt**  $\Leftrightarrow$  existiert ein  $k > 0$  mit  $|f(x)| \leq k$  für alle  $x \in D(f)$ .

- Veranschaulichungen und Beispiele.

- Verschiebung von Funktionen

Die Kurve der Funktion  $y = f(x)$  soll im  $x$ - $y$ -Koordinatensystem senkrecht oder waagrecht verschoben werden. Die Strecke der Verschiebung soll die Länge  $k$  mit  $k \in \mathbb{R}, k \geq 0$  haben.

- Senkrechte Verschiebung

$f(x) + k$  verschiebt  $f$  um  $k$  nach oben.

$f(x) - k$  verschiebt  $f$  um  $k$  nach unten.

- Waagrechte Verschiebung

$f(x - k)$  verschiebt  $f$  um  $k$  nach rechts.

$f(x + k)$  verschiebt  $f$  um  $k$  nach links.

- Beispiele
- Streckung/Stauchung von Funktionen  
Die Kurve der Funktion  $y = f(x)$  soll im  $x$ - $y$ -Koordinatensystem senkrecht oder waagrecht gestreckt bzw. gestaucht werden.
- Senkrechte Streckung/Stauchung  
 $k \cdot f(x)$  mit  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 1$  streckt in  $y$ -Richtung auf das  $k$ -fache.  
 $k \cdot f(x)$  mit  $k \in \mathbb{R}$ ,  $0 < k < 1$  staucht in  $y$ -Richtung auf das  $k$ -fache.
- Waagrechte Streckung/Stauchung  
 $f(kx)$  mit  $k \in \mathbb{R}$ ,  $0 < k < 1$  streckt in  $x$ -Richtung auf das  $(1/k)$ -fache.  
 $f(kx)$  mit  $k \in \mathbb{R}$ ,  $k > 1$  staucht in  $x$ -Richtung auf das  $(1/k)$ -fache.
- Beispiele
- Was geschieht bei  $g(x) = -2,5 \cdot f(x)$  oder  $h(x) = f(-0,5 \cdot x)$  ?
- Definition (umkehrbare Funktion)  
Eine Funktion  $f$  heißt **umkehrbar**, wenn aus  $x_1, x_2 \in D(f)$  mit  $x_1 \neq x_2$  stets  $f(x_1) \neq f(x_2)$  folgt.
- Skizze, graphische Interpretation.
- **Umkehrfunktion** graphisch: Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten.
- **Umkehrfunktion** rechnerisch:  $y = f(x)$  nach  $x$  auflösen (falls möglich); dann  $x$  und  $y$  vertauschen.
- Beispiele
- Anmerkung: Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion zu  $f$  ist gleich dem Wertebereich von  $f$ .
- Satz  
Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar.