

Grundlagen der Differentialrechnung

Kettenregel, Ableiten von Umkehrfunktionen

- **Problemstellung:** Ableitung einer Funktion der Gestalt $g(f(x))$, zum Beispiel $g(f(x)) = \sin(x^2)$. Hierbei ist $g(z) = \sin(z)$ und $z = f(x) = x^2$. Wir nennen g die *äußere Funktion* und f die *innere Funktion*.

- **Satz (*Kettenregel*)**

Es seien f und g differenzierbar. (Genauer: $z = f(x)$ sei an der Stelle x differenzierbar und $y = g(z)$ an der dazugehörigen Stelle $z = f(x)$.)

Dann ist auch $g(f(x))$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

(ohne Bew.)

- **Anmerkung:**

1. Wir nennen g' die *äußere Ableitung* und f' die *innere Ableitung*.
2. Mit der Abkürzung $z = f(x)$ kann man schreiben:

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = \left. \frac{d}{dz} g(z) \right|_{z=f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x).$$

3. Mit der Abkürzung $y = g(f(x))$ kann man die symbolische Regel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

aufschreiben.

- **Beispiele**
- **Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)**

Die Funktion f sei auf dem Intervall (a, b) differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Dann existiert auf dem Bildbereich von (a, b) die Umkehrfunktion g zur Funktion f und ist dort differenzierbar mit

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

- Beweis
- Beispiele: Ableitungen von
 1. e -Funktion,
 2. Potenzfunktion mit beliebigem reellen Exponenten,
 3. Exponentialfunktion mit beliebiger Basis $b > 0$, $b \neq 1$,
 4. Logarithmusfunktion mit beliebiger Basis $b > 0$, $b \neq 1$,
 5. Arcusfunktionen.