Partielle Ableitungen und Fehlerrechnung

Funktionen mehrerer Veränderlicher, partielle Ableitungen

- Beispiele: Funktionen mehrerer Veränderlicher.

- Geometrische Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher.

- Schreibweisen

  Menge aller reellen Zahlen: $\mathbb{R}$

  Menge aller geordneten Paare (x, y) aus reellen Zahlen: $\mathbb{R}^2$

  Menge aller Tripel (x, y, z) aus reellen Zahlen: $\mathbb{R}^3$

  Menge aller n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus reellen Zahlen: $\mathbb{R}^n$

- Definition

  Eine ***reellwertige Funktion*** f ***von*** n ***reellen Veränderlichen*** ordnet jedem Element $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eindeutig eine reelle Zahl y zu,

  $$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

  Die Menge D heißt der Definitionsbereich der Funktion f.

  Die Menge aller y, die von der Funktion angenommen werden, wenn die n-Tupel die gesamte Menge D durchlaufen, heißt der Wertebereich von f.

- Beispiele

- Definition (partielle Ableitung)

  Es sei eine Funktion $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von n Veränderlichen gegeben. Als ***partielle Ableitung*** von f nach x_i bezeichnet man die Funktion, die dadurch entsteht, daß man alle Veränderlichen außer x_i konstant hält und die Funktion f, die dann nur noch die eine Variable x_i hat, nach x_i ableitet. Dabei werden die üblichen Regeln für das Differenzieren einer Funktion einer Veränderlichen verwendet.

  Schreibweise:

  $$y_{x_i} = f_{x_i} = \frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

- Beispiele

- Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitungen erster Ordnung bei einer Funktion von zwei Veränderlichen.

- Anmerkung: Wird eine Funktion mehrerer Veränderlicher mehrmals nacheinander partiell differenziert, entstehen partielle Ableitungen höherer Ordnung.
- Schreibweise: Wird die Funktion $u = f(x, y, z)$ zuerst nach x und dann nach z partiell abgeleitet, schreibt man

  $$u_{x\,z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\,.$$

  Wird zweimal nacheinander partiell nach y differenziert, schreibt man

  $$u_{y\,y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,.$$

- Beispiele
- Anmerkung: Ist f beliebig oft partiell differenzierbar, dann ist bei gemischten partiellen Ableitungen das Ergebnis unabhängig von der Reihenfolge,

  $$f_{x_i\,x_j} = f_{x_j\,x_i}.$$

  (Geringere Voraussetzungen: siehe Satz von Schwarz.)
- Definition (totales Differential)

  Das ***totale Differential*** (vollständige Differential) einer Funktion mehrerer Veränderlicher $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist der lineare Differentialausdruck

  $$\begin{aligned} dy &= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\,dx_i \\ &= f_{x_1}\,dx_1 + f_{x_2}\,dx_2 + \ldots + f_{x_n}\,dx_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n. \end{aligned}$$

- Beispiele
- Geometrische Veranschaulichung.