

## Partielle Ableitungen und Fehlerrechnung

### Absolute und relative Fehler, lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz

- Beispiel
- Definition

Zu den **wahren Werten**  $x_w, y_w, \dots$  werden **Näherungswerte**  $\tilde{x}, \tilde{y}, \dots$  bestimmt, zum Beispiel Meßwerte oder Mittelwerte  $\bar{x}, \bar{y}, \dots$  aus Einzelmessungen.

Als **absoluten Fehler** von  $\tilde{x}$  bezeichnen wir

$$|x_w - \tilde{x}|$$

und als **relativen Fehler** von  $\tilde{x}$

$$\left| \frac{x_w - \tilde{x}}{x_w} \right|.$$

Der relative Fehler ausgedrückt in Prozenten wird **prozentualer Fehler** genannt.

- Anmerkung:
  1. Da der wahre Wert normalerweise unbekannt ist, wird der absolute Fehler üblicherweise abgeschätzt,

$$|x_w - \tilde{x}| \approx \Delta x$$

und die Abschätzung zusammen mit dem Näherungswert z.B. durch  $x = \tilde{x} \pm \Delta x$  angegeben. (Diese Schreibweise wird aber auch verwendet, wenn  $\Delta x$  aufgrund eines anderen Fehlerkonzepts zustande kommt.)

2. Der relative Fehler wird durch

$$\left| \frac{x_w - \tilde{x}}{x_w} \right| \approx \left| \frac{x_w - \tilde{x}}{\tilde{x}} \right| \approx \left| \frac{\Delta x}{\tilde{x}} \right|$$

abgeschätzt, z.B. durch  $|\Delta x / \tilde{x}|$ .

3. Der prozentuale Fehler ist

$$100 \cdot (\text{relativer Fehler})\%,$$

z.B.  $100 \cdot |\Delta x / \tilde{x}| \%$ .

- Problemstellung:

Eine Größe  $y$  hängt von den Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ab:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Hätte man die wahren Werte von  $x_1, \dots, x_n$  zur Verfügung, könnte man diese in die Formel  $f$  einsetzen und den wahren Wert  $y_w$  von  $y$  berechnen. Weil man die wahren Werte aber nicht kennt, setzt man die Näherungswerte  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  ein, und erhält für  $y$  die Näherung

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n).$$

Jetzt ist eine **Abschätzung des absoluten Fehlers**  $|y_w - \tilde{y}|$  gesucht.

Das Problem bei dieser Abschätzung ist, aus den Fehlern von  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  mit Hilfe der Formel  $f$  auf den Fehler von  $\tilde{y}$  zu schließen.

- Lösungsidee:

Näherungsweise Fehlerabschätzung durch Linearisierung von  $f$  mit dem totalen Differential.

- Skizze

- **Lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz**

Sind die  $\Delta x_i$  für  $i = 1, \dots, n$  Abschätzungen der absoluten Fehler von  $\tilde{x}_i$ , so kann der absolute Fehler  $|y_w - \tilde{y}|$  von  $\tilde{y}$  abgeschätzt werden durch

$$\Delta y_{max} = |f_{x_1} \cdot \Delta x_1| + |f_{x_2} \cdot \Delta x_2| + \dots + |f_{x_n} \cdot \Delta x_n|,$$

wobei in die Funktionen  $f_{x_1}, \dots, f_{x_n}$  die Näherungswerte  $\tilde{x}_i$  von  $x_i$  eingesetzt werden.

- Anmerkung: Der Wert  $\Delta y_{max}$  heißt **maximaler absoluter Fehler** von  $\tilde{y}$ .
- Anmerkung: Mit  $\Delta y_{max}$  bekommt man den **relativen Maximalfehler**

$$\left| \frac{\Delta y_{max}}{\tilde{y}} \right| = \left| \frac{\Delta y_{max}}{f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)} \right|$$

und den **prozentualen Maximalfehler**

$$100 \cdot \left| \frac{\Delta y_{max}}{\tilde{y}} \right| \%.$$

- Beispiel

- Spezialfall  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots x_n^{c_n}$

Die Maximalfehler von  $y = a x_1^{c_1} x_2^{c_2} \dots x_n^{c_n}$  setzen sich linear aus den relativen Fehlern

$$\left| \frac{\Delta x_i}{\tilde{x}_i} \right|$$

der  $\tilde{x}_i$  zusammen.

Absoluter Maximalfehler:

$$\Delta y_{max} = |f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)| \cdot \left( |c_1| \cdot \left| \frac{\Delta x_1}{\tilde{x}_1} \right| + |c_2| \cdot \left| \frac{\Delta x_2}{\tilde{x}_2} \right| + \dots + |c_n| \cdot \left| \frac{\Delta x_n}{\tilde{x}_n} \right| \right).$$

Relativer Maximalfehler:

$$\left| \frac{\Delta y_{max}}{\tilde{y}} \right| = |c_1| \cdot \left| \frac{\Delta x_1}{\tilde{x}_1} \right| + |c_2| \cdot \left| \frac{\Delta x_2}{\tilde{x}_2} \right| + \dots + |c_n| \cdot \left| \frac{\Delta x_n}{\tilde{x}_n} \right|.$$

- Anmerkung: Der relative Fehler von  $\tilde{y} = (\tilde{x})^n$  ist also das  $n$ -fache des relativen Fehlers von  $\tilde{x}$ .

Ferner ist der relative Fehler von  $\tilde{y} = \sqrt[n]{\tilde{x}}$  der  $n$ -te Teil des relativen Fehlers von  $\tilde{x}$ .

- Beispiele