Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 1.
Ein lineares Gleichungssystem (LGS) sei auf das folgende Lösungsschema transformiert:

$$
\begin{array}{|ccc|cc|r|}
\hline
1 & 0 & 0 & 4 & -7 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 9 \\
0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -12 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Wie lautet die Lösung $\vec{x}$ des LGS? Welchen Rang hat das LGS? Wie groß ist die Dimension der Lösungsmenge L? Was stellt die Lösung im geometrischen Sinne dar?

Aufgabe 2.
Lösen Sie das folgende homogene lineare Gleichungssystem nach dem Gauß-Verfahren.

$$
\begin{aligned}
x + y - 2z &= 0 \\
x - y - 2z &= 0 \\
2x + 3y - 4z &= 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\
-x_1 - 4x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

mit dem Gauß-Verfahren.

Aufgabe 4.
Berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösung des Gleichungssystems.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 - 9x_4 &= 4 \\
3x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 &= 5 \\
x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5.
Berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die Lösung des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 12x_2 + 5x_3 &= 18 \\ -x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Aufgabe 6.
Zeigen Sie, daß das folgende Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt, und bestimmen Sie diese nach der Cramerschen Regel.

$$\begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.
Untersuchen Sie, ob das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ 5x - 2z &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 3 \end{aligned}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, und berechnen Sie diese gegebenenfalls mit der Cramer-Regel.

Aufgabe 8.
Für welche reellen Werte des Parameters λ besitzt das folgende homogene lineare Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen?

$$\begin{pmatrix} (2+\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$