Vektoren

Vektorprodukt

- Definition (Vektorprodukt)

  Es seien $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Ferner sei φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Als ***Vektorprodukt*** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnen wir den Vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ mit

  1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$,
  2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$,
  3. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bilden (in dieser Reihenfolge) ein Rechtssystem.

- Anmerkung: Der Betrag des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

- Beispiele: Drehmoment, Drehimpuls, Lorentzkraft.

- Satz (Eigenschaften des Vektorprodukts)

  Für $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

  1. Distributivität: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ und $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$,
  2. Antikommutativität: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,
  3. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\,\vec{b})$.

- Begründung der Antikommutativität; ansonsten ohne Beweis.

- Anmerkung: Das Vektorprodukt ist nicht assoziativ. Gegenbeispiel.

- Satz

  Für $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ gilt:

  $$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \text{ oder } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}.$$

- Beweis

- Anmerkung: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißen ***kollinear***, falls $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ oder $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ ist.

- Beispiele, speziell mit kartesischen Einheitsvektoren.

- Satz (Berechnung des Vektorprodukts aus den Vektorkoordinaten)

  Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & a_x & b_x \\ \vec{e}_y & a_y & b_y \\ \vec{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} \\
&= \vec{e}_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} - \vec{e}_y \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} + \vec{e}_z \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} \\
&= (a_y b_z - a_z b_y)\,\vec{e}_x - (a_x b_z - a_z b_x)\,\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\,\vec{e}_z \\
&= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

- Beweis
- Beispiel: Flächeninhalt eines Dreiecks.
- Beispiel: Lorentzkraft auf ein Elektron.
- Anmerkung: Determinanten zweiter und dritter Ordnung haben eine anschauliche Interpretation. Für Determinanten dritter Ordnung werden wir das an anderer Stelle sehen, wenn das Spatprodukt betrachtet wird. Für die zweite Ordnung gilt die folgende Aussage.
- Satz

  Der Betrag einer Determinante zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$$

  ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das im $\mathbb{R}^2$ von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ aufgespannt wird.
- Beweis