

## Vektoren

### Spatprodukt, Geradendarstellungen

- Definition (Spatprodukt)

Es seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ . Als **Spatprodukt** (oder *gemischtes Produkt*) der Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  bezeichnen wir die reelle Zahl

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

- Geometrische Veranschaulichung mit dem Spatvolumen.
- Satz (Berechnung des Spatprodukts mit einer Determinante)

Zu  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$  und  $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$  ist das Spatprodukt

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}.$$

- Beweis

- Satz

Für  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  und  $\vec{c} \neq \vec{0}$  (alle drei Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^3$ ) gilt:

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ liegen in einer gemeinsamen Ebene.}$$

- Anmerkung: Vektoren, die in einer gemeinsamen Ebene liegen, heißen **komplanar**.
- Satz (Rechenregeln für das Spatprodukt)

Für das Spatprodukt der Vektoren  $\vec{a}, \vec{b}$  und  $\vec{c}$  gilt

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = [\vec{c}\vec{a}\vec{b}] = [\vec{b}\vec{c}\vec{a}] = -[\vec{a}\vec{c}\vec{b}] = -[\vec{c}\vec{b}\vec{a}] = -[\vec{b}\vec{a}\vec{c}],$$

d.h. bei zyklischer Vertauschung bleibt der Wert gleich, wohingegen sich bei nichtzyklischer Vertauschung das Vorzeichen ändert.

- Beweis

- Vektorielle Darstellung einer **Geraden** (**Punkt-Richtungsform**)

Gegeben: Punkt  $P_1$  und Vektor  $\vec{a}$ .

Gesucht: Gleichung der Geraden durch  $P_1$  und parallel zu  $\vec{a}$ .

Für einen *beliebigen* Punkt  $P$  auf der Geraden gilt:

$$\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{P_1P} = \vec{OP}_1 + \lambda\vec{a}$$

mit einem  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Alle Punkte der Geraden (und keine anderen Punkte) werden durch

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{OP}_1 + \lambda\vec{a}$$

mit einem Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  beschrieben.

- Skizze
- Beispiel
- Vektorielle Darstellung einer **Geraden** (**Zweipunkteform**)

Gegeben: zwei Punkte  $P_1, P_2$ .

Gesucht: Gleichung der Geraden durch  $P_1$  und  $P_2$ .

Der Fall läßt sich auf die Punkt-Richtungsform zurückführen, wenn als Richtungsvektor  $\vec{a} = \vec{P_1P_2}$  genommen wird.

Alle Punkte der Geraden (und keine anderen Punkte) werden dann durch

$$\vec{r}(\lambda) = \vec{OP}_1 + \lambda\vec{P_1P_2}$$

mit einem Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  beschrieben.

- Skizze
- Beispiel: Eine Gerade gehe durch  $P_1 = (5 | 3 | -7)$  und  $P_2 = (4 | 8 | 1)$ . Liegen  $P_3 = (3 | 13 | 9)$  und  $P_4 = (7 | -7 | 4)$  auf der Geraden?
- Beispiel: Gerade gegeben; Durchstoßpunkt durch die  $x$ - $y$ -Ebene gesucht.
- Beispiel: Schnittpunkt und Schnittwinkel zweier Geraden.