Matrizen

Inverse Matrix, Invertierbarkeit

- Definition

  Es sei A eine quadratische Matrix und E die Einheitsmatrix vom selben Typ. Die Matrix A heißt ***invertierbar***, falls eine Matrix X mit

  $$AX = E$$

  existiert. Dann heißt X die zu A ***inverse Matrix***. Schreibweise: A^{-1}.

- Anmerkung: Die Schreibweise A^{-1} ist nur dann sinnvoll, wenn die Inverse eindeutig ist (sonst würden wir verschiedene Matrizen mit demselben Symbol bezeichnen).

- Satz

  Es sei A eine invertierbare Matrix. Dann ist die Inverse A^{-1} eindeutig bestimmt, und es gilt

  $$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

  (ohne Bew.)

- Beispiel: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ hat die Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix}$. Nachrechnen!

- Beispiel: Zur Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ existiert keine Inverse.

  Angenommen es gibt doch eine Inverse $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$. Dann muß

  $$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  gelten. Dies führt unmittelbar zu einem nicht lösbaren linearen Gleichungssystem. Nachrechnen!

- Anmerkung: Man kann sich nun fragen, ob es eine Bedingung für die Invertierbarkeit einer Matrix gibt. Kann man an einer anderen Eigenschaft der Matrix „ablesen“, ob eine Inverse existiert?

- Satz

  Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$ ist (mit anderen Worten: wenn A regulär ist).

- Beweis

- Anmerkung: Ist die quadratische Koeffizientenmatrix A invertierbar, kann man das lineare Gleichungssystem
$$A\vec{x} = \vec{b}$$
  von links mit der Inversen A^{-1} multiplizieren und erhält $A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, woraus sich wegen $A^{-1}A = E$ und $E\vec{x} = \vec{x}$ die Lösung
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
  des LGS ergibt.

  Die Lösung eines LGS mit Hilfe der inversen Koeffizientenmatrix A^{-1} ist sinnvoll, wenn mehrere LGS mit identischer Koeffizientenmatrix A aber verschiedenen rechten Seiten $\vec{b}$ gegeben sind. Ansonsten wird man den Gauß-Algorithmus verwenden. Dieser wird auch zur Berechnung inverser Matrizen benutzt.

- Berechnung inverser Matrizen mit dem Gauß-Algorithmus.

  Wir machen uns das Verfahren zur Berechnung inverser Matrizen am Beispiel von 2×2 - Matrizen klar.

  Wenn zur Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Inverse $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ existiert, muß aufgrund der Definition der Invertierbarkeit
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  gelten. Dazu gleichwertig sind die beiden linearen Gleichungssysteme
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
  Das linke LGS wird gelöst, indem die Koeffizientenmatrix nach dem Gauß-Algorithmus durch eine Folge von elementaren Umformungen in die Einheitsmatrix umgewandelt wird. Mit der identischen Folge elementarer Umformungen wird aber auch das rechte LGS gelöst.

  Schreibt man die rechten Seiten der LGS nebeneinander auf, braucht man die Folge der elementaren Umformungen nur einmal durchzuführen. (Die nebeneinander stehenden Spalten beeinflussen sich gegenseitig nicht!)

- Algorithmus zur Matrixinversion.

  Zur Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit $\det A \neq 0$ ist die inverse Matrix A^{-1} gesucht.

Wir verwenden das modifizierte Ausgangsschema für LGS

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Matrix A Einheitsmatrix

und transformieren es mit elementaren Umformungen entsprechend dem Gauß-Algorithmus auf das folgende Lösungsschema.

$$\begin{array}{|cccc|cccc|}
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \\
\hline
\end{array}$$

Einheitsmatrix A^{-1}

- Beispiel
- Anmerkung: Statt vom Gauß-Algorithmus wird manchmal auch vom Gauß-Jordan-Algorithmus gesprochen. Die Bezeichnung Gauß-Algorithmus wird dann nur für den ersten Teil des Verfahrens verwendet, der auf eine obere Dreiecksmatrix führt. Beim Lösen eines LGS reicht der erste Teil im Prinzip aus, da man dann ein gestaffeltes LGS hat, das durch „Rückwärtseinsetzen“ gelöst werden kann; komfortabler ist natürlich unser Lösungsschema, bei dem auch die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen eliminiert werden.
- Satz

  Es seien A und B reguläre Matrizen vom selben Typ. Dann gelten die Rechenregeln:

  1. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und
  2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

  Speziell gilt, daß A^T invertierbar ist, wenn A invertierbar ist.