

## Matrizen

### Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Rang einer Matrix, Drehmatrizen

- Definition

Ein Vektor  $\vec{v}$  heißt **Linearkombination** aus den  $n$  Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ , wenn gilt

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i$$

mit reellen Zahlen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

- Beispiel

- Definition

Die  $n$  Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  heißen **linear abhängig**, wenn sich einer dieser Vektoren als Linearkombination der restlichen  $n - 1$  Vektoren darstellen läßt, ansonsten heißen sie **linear unabhängig**.

- Beispiele

- Satz

Die  $n$  Vektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  sind genau dann linear unabhängig, wenn  $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$  nur für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  gilt.

- Beweis

- Anmerkung: In dem quadratischen LGS  $A\vec{x} = \vec{0}$  ist  $\vec{0}$  eine Linearkombination der Spaltenvektoren von  $A$ , d.h. es gilt

$$x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

mit den Spaltenvektoren  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  von  $A$ .

Die Determinante von  $A$  ist genau dann ungleich Null, wenn das LGS eindeutig lösbar ist, also nur die triviale Lösung  $x_1 = \dots = x_n = 0$  hat, die Spaltenvektoren von  $A$  also linear unabhängig sind.

Beachten wir, daß die Matrix  $A$  genau dann invertierbar ist, wenn die Determinante von  $A$  ungleich Null ist, so erhalten wir den folgenden Satz.

- Satz

Es sei  $A$  eine quadratische Matrix.  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren linear unabhängig sind.

- Anmerkung: Entsprechendes gilt mit den Zeilenvektoren, da  $\det(A)$  genau dann ungleich Null ist, wenn  $\det(A^T)$  ungleich Null ist.

- Satz

Der Rang eines beliebigen LGS (sowohl quadratisch als auch nichtquadratisch) ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{aligned} \text{rg(LGS)} &= \text{maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren} \\ &= \text{maximale Anzahl der linear unabhängigen Spaltenvektoren.} \end{aligned}$$

(ohne Beweis)

- Definition

Der **Rang einer Matrix  $A$**  ist gleich dem Rang eines LGS mit der Koeffizientenmatrix  $A$ .

- Anmerkung: Somit ist der Rang einer Matrix gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren.

- Anmerkung: Für eine quadratische Matrix  $A$  sind also die Eigenschaften

- $A$  ist invertierbar,
- $\det A \neq 0$ ,
- $A$  ist regulär,
- die Spaltenvektoren von  $A$  sind linear unabhängig,
- die Zeilenvektoren von  $A$  sind linear unabhängig,
- der Rang von  $A$  ist maximal,
- $A\vec{x} = \vec{0}$  hat nur die triviale Lösung,
- $A\vec{x} = \vec{b}$  ist eindeutig lösbar

gleichwertig.

- Drehmatrizen: Problemstellung.

In einem  $x$ - $y$ -Koordinatensystem soll der Punkt  $P = (x_1 | y_1)$  um den Winkel  $\varphi$  um den Ursprung gedreht werden; es entsteht dann der Punkt  $Q = (x_2 | y_2)$ .

Gegeben seien  $x_1$ ,  $y_1$  und  $\varphi$ . Gesucht sind  $x_2$  und  $y_2$ .

- Skizze

- Satz

Für die Koordinaten von  $Q$  gilt:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi \\y_2 &= x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Mit einer **Drehmatrix** geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

- Beweis

- Anmerkung: Die Drehung um  $\varphi = 0^\circ$  liefert die Einheitsmatrix. Die Drehung zurück, d.h. um den Winkel  $-\varphi$  führt zur inversen Matrix. Die Drehung um einen Winkel  $\alpha$  und dann um einen Winkel  $\beta$  ist gleich der Drehung um  $\alpha + \beta$ ; das Produkt der Drehmatrizen für  $\alpha$  und  $\beta$  ist die Drehmatrix für  $\alpha + \beta$ . Damit können die Additionstheoreme der Winkelfunktionen leicht hergeleitet werden.

- Satz (Additionstheoreme der Winkelfunktionen)

Es gilt

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta).\end{aligned}$$

- Beweis